DISTANCIA SEGÚN DESPLAZAMIENTO z COSMOLÓGICO

Guillermo Navas

guillermophysics@gmail.com

Se parte de la métrica de Robertson-Walker, y se tiene en cuenta que la luz se transmite en el espacio-tiempo con el diferencial del tiempo propio nulo:

$$c^2 d\tau = 0 = c^2 dt^2 - R(t)^2 dr^2 \qquad (1)$$

donde hemos considerado que la constante de curvatura es $K = 0$ (universo plano) y $R(t)$ es el factor de escala en la métrica. Por su parte, r es la coordenada comóvil de la métrica. Se supone que los objetos cosmológicos se mueven con coordenada comóvil constante (se dice que siguen la "corriente de Hubble").

Eliminando cuadrados en (1), y tomando el signo negativo (ya que r decrece cuando la señal se aproxima al observador) queda:

$$\frac{cdt}{R(t)} = -dr \qquad (2)$$

Se toman las coordenadas de tal modo que el observador (nosotros) se sitúa en $r = 0$. Si un objeto de coordenada r emite una señal en el tiempo t_e que es recibida en t_o, integrando (2) se verifica:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt'}{R(t')} = -\int_r^0 dr = r \qquad (3)$$

En el anexo se ve que:

$$\frac{cdt}{R(t)} = -\frac{\mathrm{c}}{R_0 H_0} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{K}(1+z)^2 + \Omega_\mathrm{M}(1+z)^3 + \Omega_\mathrm{R}(1+z)^4}} \qquad (A.5)$$

Sustituyendo en (3) queda:

$$\begin{aligned} r &= \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt'}{R(t')} \\ &= -\frac{\mathrm{c}}{R_0 H_0} \int_z^0 \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{K}(1+z')^2 + \Omega_\mathrm{M}(1+z')^3 + \Omega_\mathrm{R}(1+z')^4}} \end{aligned} \qquad (4)$$

Tomamos (Density Parameter, Omega (gsu.edu)):

$$\Omega_\mathrm{K} = 0 \; (corresponde\ a\ un\ universo\ plano)$$

$$\Omega_{\mathrm{M}} = 0{,}27$$

$$\Omega_{\mathrm{r}} = 8{,}24 \times 10^{-5}$$

$$\Omega_{\Lambda} = 1 - 0{,}27 - 8{,}24 \times 10^{-5}$$

$$H_0 = 70\,\frac{\frac{km}{s}}{Mpc} = \frac{1}{14.000 \times 10^6\ años}$$

Sustituyendo los valores en (4) se tiene:

$$r = \frac{\mathrm{c}}{R_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{0{,}7299176 + 0{,}27(1+z')^3 + 8{,}24 \times 10^{-5}(1+z')^4}} \qquad (5)$$

Y la distancia a la que se encuentra el objeto en el instante t_0 es el producto de la coordenada comóvil por el factor de escala R_0, esto es:

$$D_{actual} = R_0 r$$

Por ejemplo, para z=6,2 (desplazamiento de la estrella Eärendel) se tiene:

$$D_{actual} = R_0 r = \frac{\mathrm{c}}{H_0} 2.0146990 = 28.205 \text{ millones de años luz}$$

¿Y cuál era la distancia a la que se encontraba Eärendel cuando emitió su señal (hace 12.900 millones de años)? Teniendo en cuenta que el desplazamiento z guarda relación con los factores de escala de acuerdo con la ecuación:

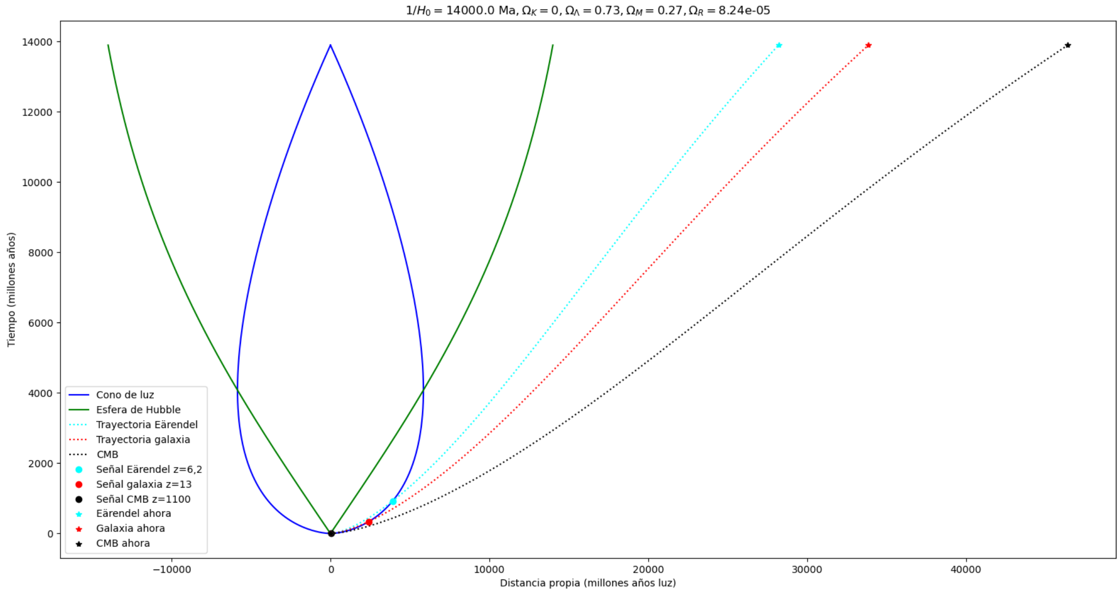
$$1 + z = \frac{R_0}{R(t)}$$

se tiene:

$$1 + 6{,}2 = \frac{R_0 r}{R(t) r} = \frac{D_{actual}}{D_{cuando\ emitió\ la\ señal}} = \frac{28.205\ M\ al}{D_{cuando\ emitió\ la\ señal}}$$

$$D_{cuando\ emitió\ la\ señal} = \frac{28.205}{7{,}2} = 3.917\ M\ al$$

En la siguiente figura se puede ver algo de lo explicado.



$1/H_0 = 14000.0$ Ma, $\Omega_K = 0, \Omega_\Lambda = 0.73, \Omega_M = 0.27, \Omega_R = 8.24$e-05
Tiempo (millones años)
Distancia propia (millones años luz)
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
−10000
0
10000
20000
30000
40000
Cono de luz
Esfera de Hubble
Trayectoria Eärendel
Trayectoria galaxia
CMB
Señal Eärendel z=6,2
Señal galaxia z=13
Señal CMB z=1100
Eärendel ahora
Galaxia ahora
CMB ahora

ANEXO

Seguimos las explicaciones del Weinberg[1]. Repetimos lo visto en "TIEMPO DE LA EMISIÓN SEGÚN DESPLAZAMIENTO $\boldsymbol{z}$ COSMOLÓGICO".

De las ecuaciones de Friedmann:

$$\dot{R}(t)^2 + K = \frac{8\pi}{3} G\rho\, R(t)^2 \quad (Weinberg\ 1.5.19)$$

La densidad es suma de las densidades parciales:

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\left[\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{M}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Omega_\mathrm{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4\right] \quad (W.1.5.38)$$

donde los Ω_i son el cociente de la densidad de energía de cada tipo a la densidad crítica. Así, Ω_Λ es el correspondiente a la densidad de energía de vacío, Ω_M el de la materia y Ω_R el de la radiación.

Si se asocia a la curvatura una densidad, se tiene:

$$\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{M} + \Omega_\mathrm{R} + \Omega_\mathrm{K} = 1\ , \qquad \Omega_\mathrm{K} = -\frac{K}{R_0^2 H_0^2} \quad (W.1.5.40)$$

La ecuación $(W.\ 1.5.19)$ se transforma en:

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{K}{R(t)^2}$$

Y utilizando la definición del parámetro de Hubble ($H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$), queda:

$$H(t)^2 = H_0^2\left[\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{K}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \Omega_\mathrm{M}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Omega_\mathrm{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4\right]$$

Con lo que:

$$H(t) = H_0\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{K}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \Omega_\mathrm{M}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Omega_\mathrm{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4} \qquad (A.1)$$

Por otro lado, se tiene que el desplazamiento Doppler verifica:

$$1 + z = \frac{R_0}{R(t)} \quad (A.2)$$

[1] Cosmology, Oxford University Press (2008)

Diferenciando:

$$dz = -\frac{R_0}{R(t)^2}\dot{R}(t)dt = -\frac{R_0}{R(t)}H(t)dt$$

$$dt = -\frac{R(t)dz}{R_0 H(t)} \qquad (A.3)$$

Sustituyendo $(A.1)$ en $(A.3)$

$$dt = -\frac{R(t)dz}{R_0 H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{K}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \Omega_\mathrm{M}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Omega_\mathrm{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4}} \qquad (A.4)$$

Y como: $\frac{R_0}{R} = 1 + z$,

$$\frac{cdt}{R(t)} = -\frac{\mathrm{c}}{R_0 H_0}\frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{K}(1+z)^2 + \Omega_\mathrm{M}(1+z)^3 + \Omega_\mathrm{R}(1+z)^4}} \qquad (A.5)$$