VARIACIÓN DEL PARÁMETRO DE HUBBLE CON EL TIEMPO

Guillermo Navas

guillermophysics@gmail.com

Se define el parámetro (no es una constante) de Hubble como:

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \qquad (1)$$

Es decir, H es el cociente de la velocidad con que varía el factor de escala de la métrica del universo y el propio factor.

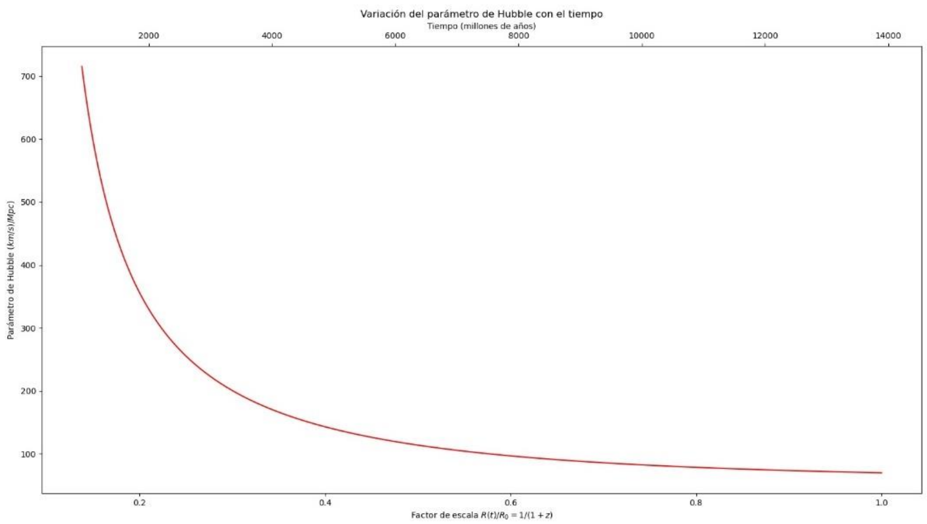
De una de las ecuaciones de Friedmann se obtiene que el parámetro en el instante t se puede expresar en función del desplazamiento Doppler z observado en una señal que fue emitida en el tiempo t.

$$H(t(z)) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{K}(1+z)^2 + \Omega_\mathrm{M}(1+z)^3 + \Omega_\mathrm{R}(1+z)^4} \qquad (2)$$

donde H_0 es el parámetro de Hubble en el momento actual (edad del universo) y las Ω_i son los parámetros de densidad.

Utilizando los parámetros de densidad vistos otras veces y un H_0 de 70, se tiene:

$$H(z) = 70 \sqrt{0{,}7299176 + 0{,}27(1+z)^3 + 8{,}24 \times 10^{-5}(1+z)^4}\, \frac{\frac{km}{s}}{Mpc} \quad (3)$$



En la gráfica sólo se muestra el valor de H para $t > 900$ millones de años equivalentes a un $z < 6{,}2$.

Cualitativamente, en un universo en expansión, si partió de una singularidad con $R(t) = 0$, utilizando la definición (1) se deduce que $H(0)$ fue infinito, y a partir de ahí decreció. De otra forma, para $t = 0$ el desplazamiento z que se observaría sería infinito, por tanto, dando ese valor en (3) obtendríamos un valor infinito.

En la práctica el z mayor observado, y no espectroscópicamente, es $z = 1.100$ correspondiente al CMB. Para ese valor se tiene:

$$H(1.100) = 21.941\, H_0 = 1.535.909\, \frac{\frac{km}{s}}{Mpc}$$

De acuerdo con (2), derivando, se tiene:

$$\frac{dH}{dz} = \frac{H_0\, (2\Omega_{\mathrm{K}}(1+z) + 3\Omega_{\mathrm{M}}(1+z)^2 + 4\Omega_{\mathrm{R}}(1+z)^3)}{2\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_{\mathrm{K}}(1+z)^2 + \Omega_{\mathrm{M}}(1+z)^3 + \Omega_{\mathrm{R}}(1+z)^4}}$$

$$\frac{dH}{dz} = \frac{H_0\, (2\Omega_{\mathrm{K}}(1+z) + 3\Omega_{\mathrm{M}}(1+z)^2 + 4\Omega_{\mathrm{R}}(1+z)^3)}{\frac{2H(z)}{H_0}}$$

$$\frac{dH}{dz} = \frac{1}{2}\frac{H_0(2\Omega_{\mathrm{K}}(1+z) + 3\Omega_{\mathrm{M}}(1+z)^2 + 4\Omega_{\mathrm{R}}(1+z)^3)}{\frac{H(z)}{H_0}} \qquad (4)$$

Si lo que nos interesa es conocer $\frac{dH}{dt}$, por la regla de la cadena:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{\mathrm{dz}}\frac{dz}{dt}$$

Y como, de acuerdo con lo visto en otra parte,

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{R_0}{R(t)}H(t) = -(1+z)H(t)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{H_0(2\Omega_{\mathrm{K}}(1+z) + 3\Omega_{\mathrm{M}}(1+z)^2 + 4\Omega_{\mathrm{R}}(1+z)^3)}{\frac{H(z)}{H_0}}(1+z)H\big(t(z)\big)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{2}(2\Omega_{\mathrm{K}}(1+z)^2 + 3\Omega_{\mathrm{M}}(1+z)^3 + 4\Omega_{\mathrm{R}}(1+z)^4)H_0^2 \qquad (5)$$

Para el momento actual ($z = 0$) se tendría:

$$\frac{dH_0}{dt} = -\frac{1}{2}(2\Omega_{\mathrm{K}} + 3\Omega_{\mathrm{M}} + 4\Omega_{\mathrm{R}})H_0^2 \qquad (6)$$

Y para los valores que venimos utilizando:

$$\frac{dH_0}{dt} \cong -\frac{0{,}81}{2}\left(\frac{1}{14.000\ años}\right)^2 = -2{,}06 \times 10^{-9}\ años^{-2} \qquad (7)$$

Cantidad que es imposible que sea medida.

Si fuéramos capaces de medir la variación del desplazamiento Δz experimentado por la luz proveniente de un objeto en un intervalo de años Δt, la siguiente fórmula nos permite conocer el valor de H en el tiempo (o equivalentemente z) en que la luz fue emitida:

$$H(z) = (1+z)H_0 - \frac{\Delta z}{\Delta t_0} \qquad (8)$$

El desplazamiento z viene dado por

$$1 + z = \frac{R_0}{R(t)} \qquad (3)$$

Derivando (3)

$$\frac{dz}{dt_0} = \frac{\dot{R}_0}{R(t)} - \frac{R_0}{R(t)^2}\frac{dR(t)}{dt}\frac{dt}{dt_0}$$

Y como por el efecto Doppler, $\frac{dt}{dt_0} = \frac{1}{1+z}$

$$\frac{dz}{dt_0} = \frac{\dot{R}_0}{R(t)} - \frac{R_0}{R(t)^2}\dot{R}(t)\frac{1}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dt_0} = \frac{R_0}{R(t)}\frac{\dot{R}_0}{R_0} - \frac{R_0}{R(t)}\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\ \frac{1}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dt_0} = (1+z)H_0 - (1+\mathrm{z})H(t)\ \frac{1}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dt_0} = (1+z)H_0 - H(t)$$

Que se puede expresar como:

$$H(t) = (1+z)H_0 - \frac{dz}{dt_0} \qquad (9)$$

Es decir, el parámetro de Hubble en el tiempo en que la luz (que observamos ahora con desplazamiento z) fue emitida se puede obtener mediante la fórmula anterior si medimos la variación dz durante el intervalo de tiempo dt_0.

Si pasamos de diferenciales a incrementos, y teniendo en cuenta la relación existente entre t y z, (9) se convierte en la ecuación (8):

$$H(z) = (1+z)H_0 - \frac{\Delta z}{\Delta t_0}$$

Hay que señalar que aplicar (8) equivaldría a medir H a partir de las medidas de H_0, z,Δz y Δt_0.

Se puede comparar (8) y (3) lo cual proporcionaría un test más para el modelo ΛCDM.

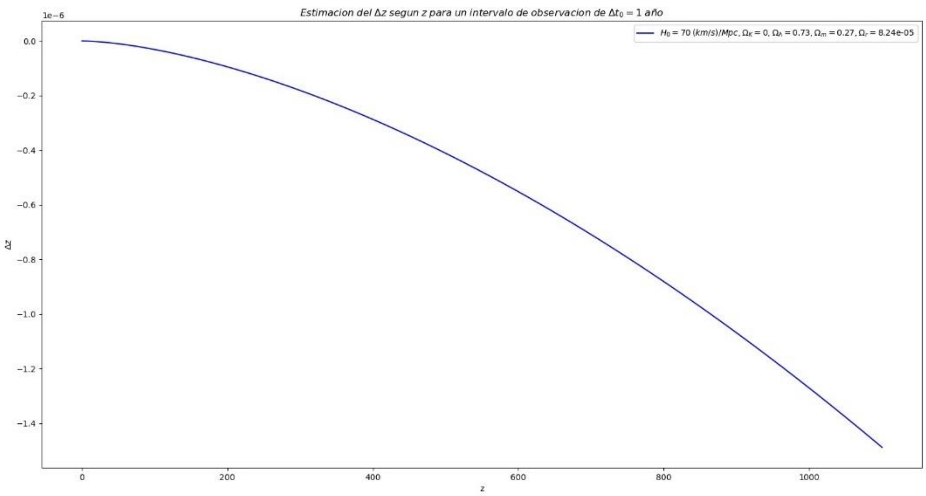
Una estimación del valor del Δz se puede obtener igualando (8) a (3),

$$H_0\sqrt{0{,}7299176 + 0{,}27(1+z)^3 + 8{,}24\times 10^{-5}(1+z)^4} = (1+z)H_0 - \frac{\Delta z}{\Delta t_0}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t_0} = \left((1+z) - \sqrt{0{,}7299176 + 0{,}27(1+z)^3 + 8{,}24\times 10^{-5}(1+z)^4}\right)H_0$$

$$\Delta z = \left((1+z) - \sqrt{0{,}7299176 + 0{,}27(1+z)^3 + 8{,}24\times 10^{-5}(1+z)^4}\right)\frac{\Delta t_0\ año}{14.000\times 10^6\ año}$$

En la figura se representa Δz para el caso en que $\Delta t_0 = 1\ año$



Por ejemplo, para un $z = 10$ la variación en un año sería de $\Delta z = -5{,}72E - 10$. Se necesitaría 100 años para observar un desplazamiento de $\Delta z = -5{,}72E - 8$.

Variación de z por año según z	
z	Δz en 1 año
1	-2,14E-11
2	-1,19E-11
3	-1,76E-11
4	-6,26E-11
5	-1,21E-10
10	-5,72E-10
100	-3,10E-08
1100 (CMB)	-1,49E-06

Desconozco la precisión con la que actualmente se miden los valores de z y la factibilidad de medir estos pequeñísimo variaciones.