

DIAGRAMA DE LOEDEL

Guillermo Navas

guillermophysics@gmail.com

CONTENIDO

0. INTRODUCCIÓN	1
1. OBTENCIÓN DEL DIAGRAMA DE BREHME (según Shadowitz)	2
2. OBTENCIÓN DEL DIAGRAMA DE LOEDEL (según Shadowitz).....	7
3. EFECTOS RELATIVISTAS VISUALIZADOS EN LOS DIAGRAMAS DE LOEDEL	10
3.1. Las líneas de simultaneidad son las paralelas al eje espacial.....	10
3.2. Líneas de coordenada espacial constante son las paralelas al eje de tiempo..	11
3.3. ¿Cómo se observa en el sistema (X, cT) un evento situado sobre el <i>eje ct</i> ?	11
3.4. ¿Cómo se ve en el sistema (x, ct) un evento situado sobre el <i>eje cT</i> ?.....	12
3.5. Invariancia de la velocidad de la luz.	12
3.6. Composición relativista de la velocidad.	12
3.7. Dilatación del tiempo.	14
3.8. Contracción de la longitud.	16
4. DIAGRAMA DE MINKOWSKI	19
5. DIAGRAMA DE LOEDEL COMO UN DIAGRAMA DOBLE DE MINKOWSKI	24
ANEXO 1: RELACIÓN ENTRE COORDENADAS EN EL DIAGRAMA DE BREHME	27
ANEXO 2: RELACIÓN ENTRE COORDENADAS EN EL DIAGRAMA DE LOEDEL	31
ANEXO 3: DIAGRAMA DE MINKOWSKI OBTENIDO DE LA MÉTRICA.....	33
ANEXO 4: INTERVALO ESPACIOTEMPORAL	40
ANEXO 5: CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD	44

0. INTRODUCCIÓN

El diagrama de Loedel, como el diagrama de Minkowski, sirve para representar el espaciotiempo relativista de 2 dimensiones (una para el espacio y otra para el tiempo) visto desde dos sistemas de referencia en movimiento relativo entre sí. Permite asignar a cada “evento”¹ las coordenadas en dos sistemas de referencia relacionadas por las transformadas de Lorentz. Por ejemplo, se puede ver geoméricamente la relación de

¹ En relatividad los puntos del espaciotiempo se les denomina evento o sucesos. Quedan identificados por el tiempo en que ocurre y el lugar. Se consideran instantáneos y sin extensión (puntuales).

simultaneidad según el sistema de referencia utilizado o los efectos de contracción de la longitud y de la dilatación del tiempo. En el caso del diagrama de Loedel, permite hacer cálculos y encontrar relaciones usando razonamientos trigonométricos elementales.

Los diagramas de Loedel deben su nombre al físico uruguayo Enrique Loedel. En este enlace del Blog de Martín Monteiro se pueden encontrar sus libros: <https://fiscamartin.blogspot.com/2021/06/los-libros-de-loedel.html>, incluyendo el libro [Física Relativista](#) que es muy recomendable y que me parece muy actual teniendo en cuenta su fecha de publicación.

Inicialmente, utilizamos las explicaciones de Albert Shadowitz en su libro “Special Relativity”, Ed. Dover, 1968, libro que, por otra parte, es muy adecuado para iniciarse en la Relatividad Especial. Shadowitz explica los distintos pasos que hay que dar para, partiendo de los diagramas cartesianos, llegar primero al diagrama de Brehme y luego, a partir de él, al diagrama de Loedel. Esta construcción es un proceso con más pasos, pero no requiere de conocimientos especiales de inicio. Por mi parte, luego, deduciré el diagrama de Loedel en menos pasos partiendo de los diagramas de Minkowski, lo que requiere explicar primero los diagramas de Minkowski.

1. OBTENCIÓN DEL DIAGRAMA DE BREHME (según Shadowitz)

Partimos de un sistema de referencia cartesiano. En la figura 1 representamos los ejes, así como las coordenadas de un punto genérico, P .

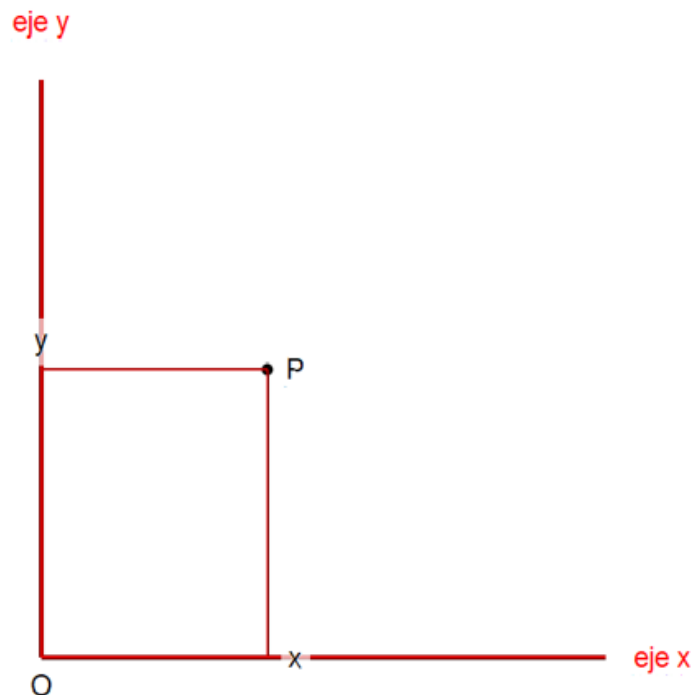


Fig. 1: Sistema de referencia cartesiano.

La distancia OP entre el origen O y P es igual a:

$$\text{dist}(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2} = d \quad (* 1)$$

En un sistema cartesiano girado un ángulo α , con ejes x' e y' se obtiene, véase figura 2, otras coordenadas², pero la distancia OP permanecen constante:

$$\text{dist}(O,P) = \sqrt{x'^2 + y'^2} = d \quad (* 2)$$

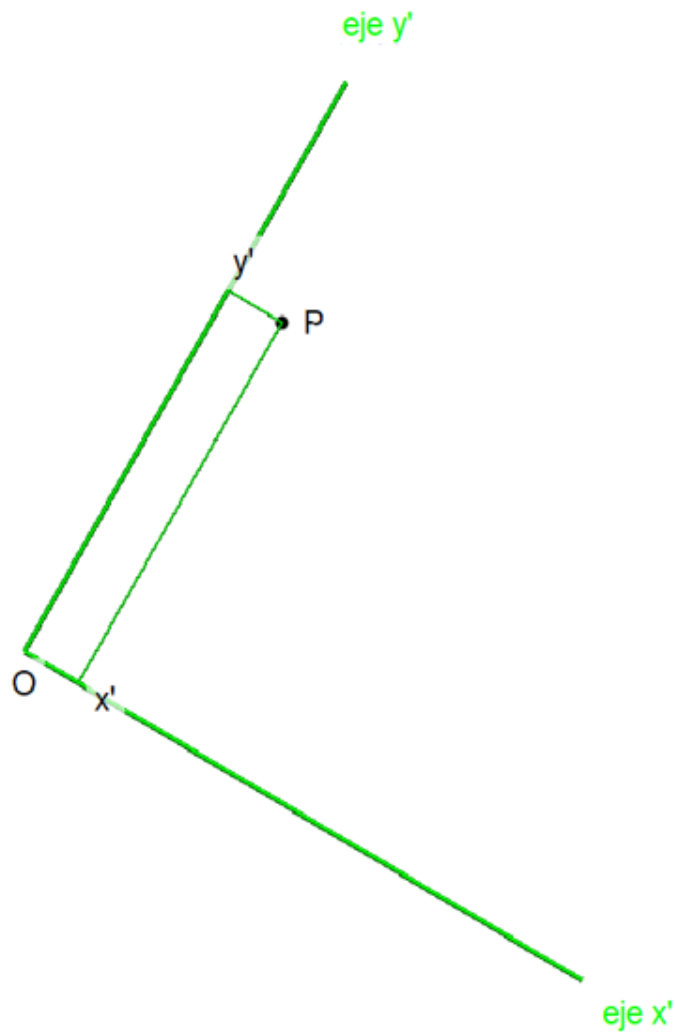


Fig. 2: Sistema cartesiano girado un ángulo α .

Superponiendo los dos sistemas de referencia se obtiene la figura 3.

² Si el eje x' tiene como vector unitario $e_{x'} = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$, la coordenada x' es igual al producto escalar del vector (x, y) y $(\cos \alpha, -\sin \alpha)$, esto es: $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$.

De la misma forma, si el eje y' tiene como vector unitario $e_{y'} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$, la coordenada y' es igual al producto escalar del vector (x, y) y $(\sin \alpha, \cos \alpha)$, esto es: $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$.

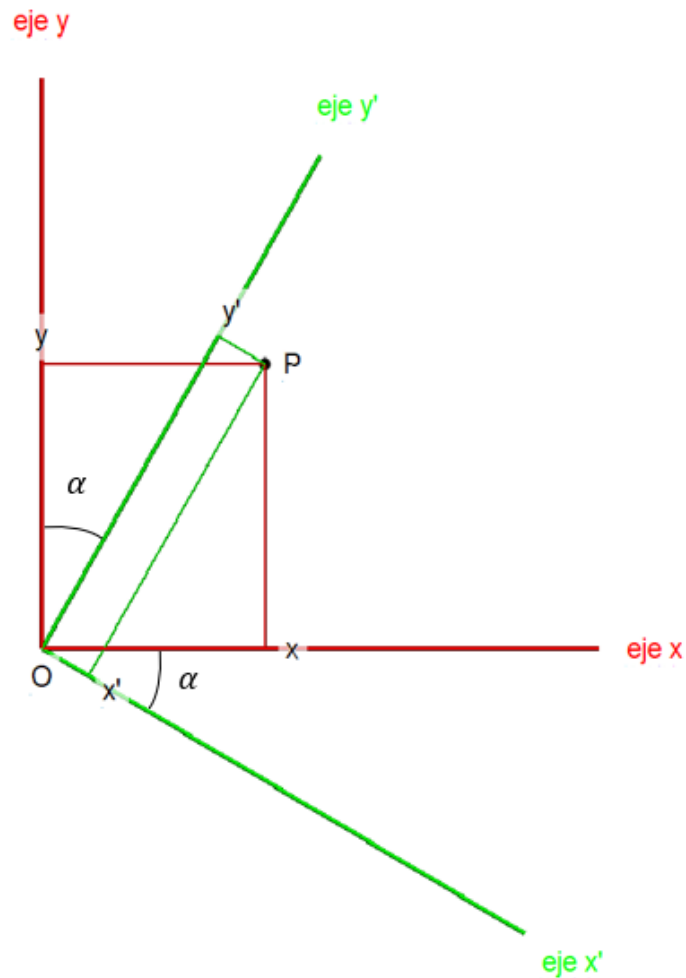


Fig. 3: Dos sistemas cartesianos superpuestos girados un ángulo α .

En la figura 3 se muestra el ángulo α entre los ejes de un sistema y otro. Por otro lado, se cumple,

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \quad (* 3)$$

Relacionar las coordenadas (x, y) con las (x', y') es un ejercicio de álgebra lineal³.

El siguiente paso es girar un ángulo $\alpha/2$ en sentido contrario a las agujas del reloj para que los dos sistemas de referencia queden girados $\alpha/2$ respecto a la horizontal/vertical. Se obtiene, entonces, la figura 4:

³ La relación matricial siguiente permite pasar de las coordenadas (x, y) de un sistema cartesiano a las coordenadas (x', y') de un sistema girado α :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

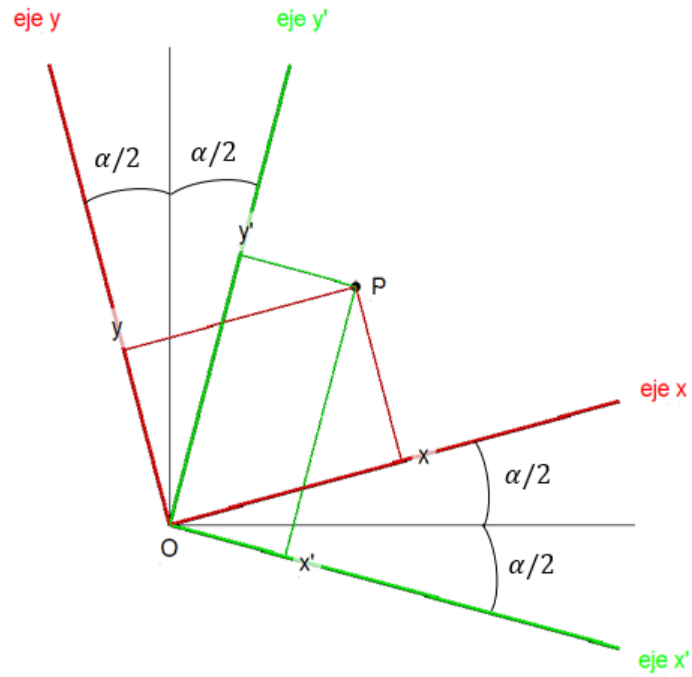


Fig. 4: Se gira figura 3 un ángulo $-\alpha/2$.

A continuación, se renombran los ejes y las coordenadas, de tal forma que:

- eje y será eje ct
- eje x' será eje X
- eje y' será eje cT

Además, vamos a pasar de tratar con puntos del plano a puntos del espaciotiempo que denominaremos "eventos". Con esto la figura 5 queda:

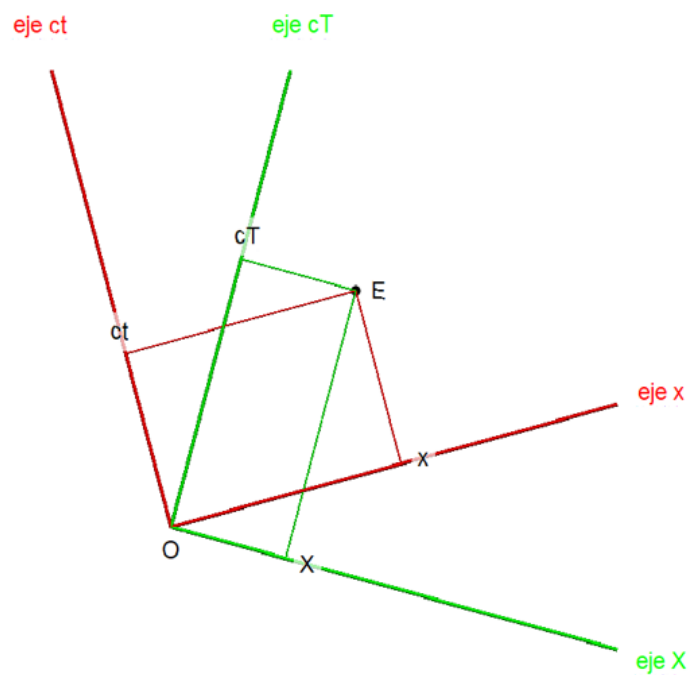


Fig. 5: Se renombran los ejes.

Con los ejes y las coordenadas renombrados lo que se tiene ahora es:

$$x^2 + c^2t^2 = X^2 + c^2T^2 \quad (* 4)$$

Por último, el siguiente paso que se da es intercambiar el nombre de los ejes espaciales, $x \leftrightarrow X$, así queda la figura 6. Como se muestra, hemos pasado de tener dos sistemas de referencia ortogonales en la figura 5 a dos sistemas de referencia no ortogonales, (cT, X) con ángulo agudo y (ct, x) con ángulo obtuso. Y las coordenadas se siguen trazando tirando la perpendicular desde el evento E al eje en cuestión.

Ahora la ecuación (* 4), véase la figura 6, se convierte en:

$$X^2 + c^2t^2 = x^2 + c^2T^2$$

Para un evento E , (x, ct) son las coordenadas para un sistema de referencia y (X, cT) para el otro. Si reordenamos los términos para que en cada miembro sólo figuren los del mismo sistema de referencia, obtenemos:

$$c^2t^2 - x^2 = c^2T^2 - X^2 \quad (* 5)$$

(* 5) se cumple si las coordenadas (x, ct) y (X, cT) se relacionan a través de las transformadas de Lorentz.

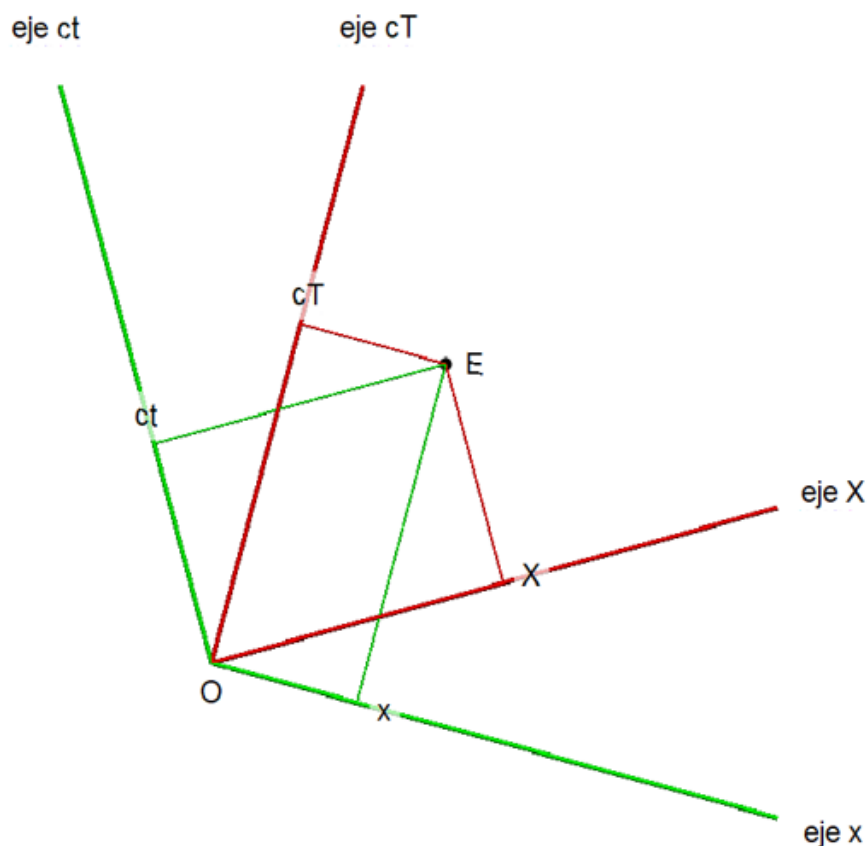


Fig. 6: Sistema de referencia tras el intercambio de ejes.

La figura 6 es el diagrama espaciotiempo de Brehme. En estos diagramas, en cada sistema de referencia, las coordenadas se obtienen trazando la perpendicular a su propio eje.

En el anexo 1 se muestra que en un diagrama de Brehme la relación entre las coordenadas de un sistema y otro son las transformadas de Lorentz. Así,

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \alpha} & \tan \alpha \\ \tan \alpha & \frac{1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (A1.7)$$

Y si se toma la interpretación $\frac{v}{c} = \sin \alpha$, la ecuación (A1.7) queda:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (A1.11)$$

que son las transformadas de Lorentz para dos dimensiones.

2. OBTENCIÓN DEL DIAGRAMA DE LOEDEL (según Shadowitz)

Al ser sistemas de referencia no ortogonales las coordenadas del diagrama de Brehme, que se obtienen proyectando la perpendicular a los ejes, no forman las componentes de un vector. Por ejemplo, sea \vec{r} el vector que va desde O a E , se puede comprobar mirando la figura 6 que la suma de los vectores componentes no es igual a \vec{r} :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OE} \neq X\vec{u}_x + cT\vec{u}_{cT} \quad (* 1)$$

Sin embargo, tal como se muestra en la figura 7, si se hace una proyección paralela al eje compañero las coordenadas resultan ser las componentes de un vector:

$$\vec{r} = X'\vec{u}_x + cT'\vec{u}_{cT} \quad (* 2)$$

donde, ahora, X' es la proyección desde el evento E hasta el *eje* X de forma paralela al eje compañero (el *eje* cT). Y lo mismo, haciendo la proyección de forma paralela al *eje* X se obtiene cT' .

Para el otro sistema de referencia, el vector se expresa como:

$$\vec{r} = x'\vec{u}_x + ct'\vec{u}_{ct} \quad (* 3)$$

siendo x' la proyección desde el evento E hasta el *eje* x de forma paralela al eje compañero (el *eje* ct), y ct' la proyección de forma paralela al *eje* x .

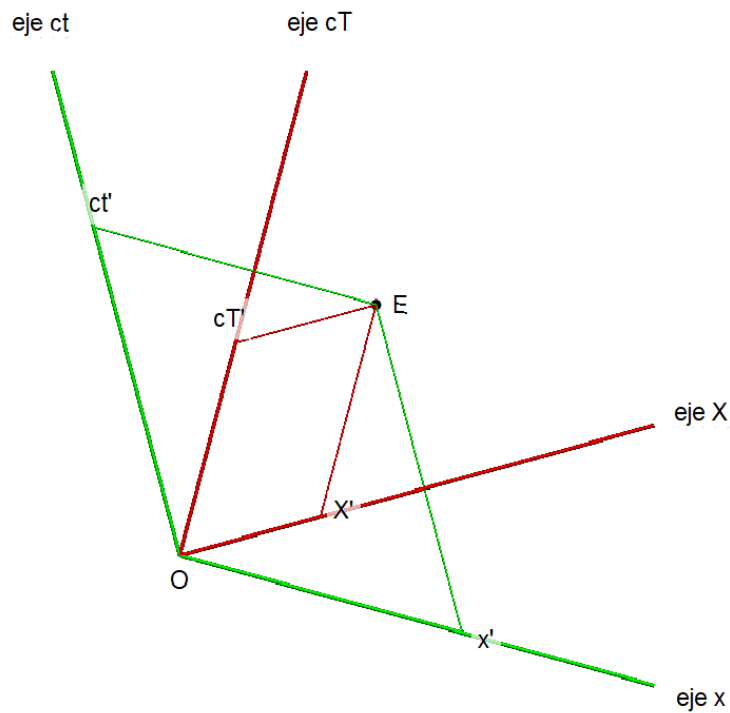


Fig. 7: Diagrama de Loedel, las coordenadas se obtienen por proyección paralela al otro eje del sistema.

Damos un paso más, ahora que no hay lugar a confusión y dejando claro que las proyecciones son paralelas, para aligerar la tipografía vamos a nombrar a las coordenadas sin primas (') (esta distinción se había añadido para diferenciar las coordenadas de la proyección perpendicular de las coordenadas de la proyección paralela):

$$\begin{aligned}
 x' &\rightarrow x \\
 ct' &\rightarrow ct \\
 X' &\rightarrow X \\
 cT' &\rightarrow cT
 \end{aligned}$$

Así que, el diagrama final de Loedel con las coordenadas para un evento se muestra en la figura 8:

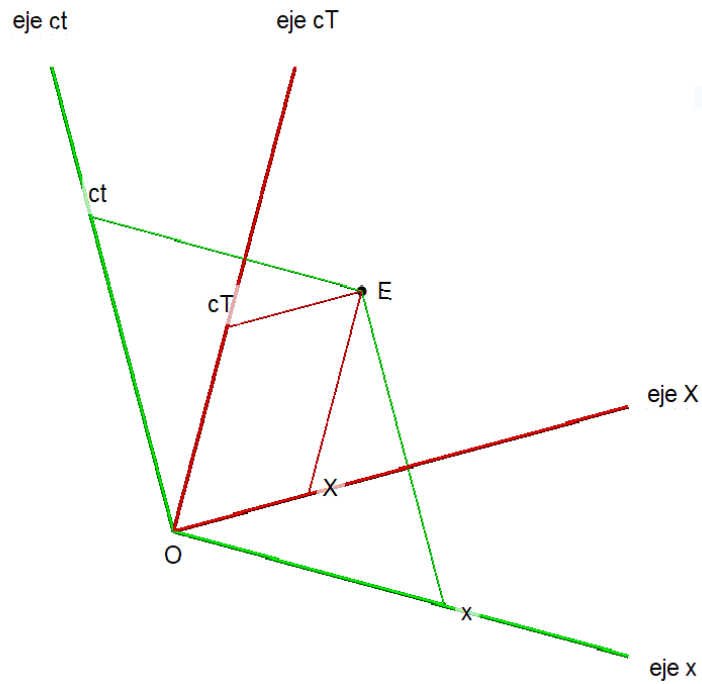


Fig. 8: Diagrama de Loedel definitivo.

En el anexo 2 se puede ver el cálculo de la relación entre las componentes de ambos sistemas:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \alpha} & -\tan \alpha \\ -\tan \alpha & \frac{1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (A2.5)$$

Y haciendo la misma interpretación $\frac{v}{c} = \sin \alpha$ que en el caso del diagrama de Brehme, la ecuación (A2.5) queda:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (A2.6)$$

La relación inversa a (A2.6) es:

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} \quad (A2.8)$$

Es habitual, designar como γ al factor $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$. Así, por ejemplo, (A2.6) queda:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (* 4)$$

Y (A2.8) como:

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} \quad (* 5)$$

3. EFECTOS RELATIVISTAS VISUALIZADOS EN LOS DIAGRAMAS DE LOEDEL

Vamos a estudiar algunas propiedades del diagrama de Loedel y efectos relativistas. En lo que sigue vamos a denominar al sistema (x, ct) como sistema A , y al sistema (X, cT) como sistema B . Algunos de los siguientes apartados requerirían de un tratamiento monográfico mucho más largo.

3.1. Las líneas de simultaneidad son las paralelas al eje espacial.

Esto significa que dos sucesos que son simultáneos en un sistema (está en la misma línea paralela al eje espacial) no pueden estar en la misma línea de simultaneidad del otro sistema. De aquí se deduce la relatividad de la simultaneidad de los sucesos. Por ejemplo, en la figura 9, para el sistema A el suceso E es simultáneo con los sucesos situado sobre el segmento $\overline{EE'}$ (siendo E' el suceso situado sobre el *eje* ct que tiene el mismo tiempo que E en el sistema A), pero para el sistema B los sucesos simultáneos a E se encuentran en la línea del segmento $\overline{EE''}$ (siendo E'' el suceso situado sobre el *eje* cT que tiene el mismo tiempo que E en el sistema B).

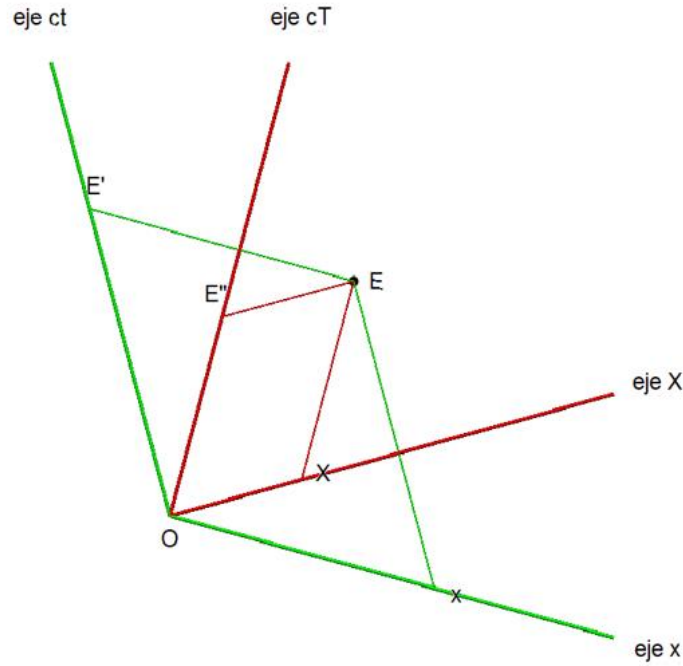


Fig. 9: E' es simultáneo a E para el sistema A y E'' lo es para el sistema B .

Por ejemplo, los eventos que son simultáneos a $T = 0$ (que se sitúan a lo largo del *eje X*) resulta que en el sistema A se encuentran a lo largo de la recta $ct = \frac{v}{c}x$, es decir, que el valor de t varía con el valor de x (que a su vez depende del valor de X , según la ecuación $x = \gamma X$) tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} X \\ \frac{v}{c}X \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \gamma X \\ ct = \gamma \frac{v}{c}X \end{cases} \Rightarrow ct = \frac{v}{c}x \quad (* 1)$$

3.2. Líneas de coordenada espacial constante son las paralelas al eje de tiempo.

De la misma forma, en la figura 9, se observa que en el sistema A los sucesos que se encuentran en la línea paralela al *eje t* (líneas que hacen un ángulo $\frac{\pi}{2} + \alpha/2$ con la horizontal) tienen la misma coordenada x . Mientras que en el B las líneas con X constantes son paralelas a su *eje T* (que hacen un ángulo $\frac{\pi}{2} - \alpha/2$ con la horizontal).

3.3. ¿Cómo se observa en el sistema (X, cT) un evento situado sobre el *eje ct*?

Si el evento se encuentra sobre el *eje ct*, tiene coordenada $x = 0$, de tal forma que:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\frac{v}{c}ct \\ ct \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -\gamma \frac{v}{c}ct \\ cT = \gamma ct \end{cases}$$

Por tanto,

$$\frac{X}{T} = -v \quad (* 2)$$

En el sistema (X, cT) un evento situado sobre el *eje* ct (es decir, que tiene coordenada $x = 0$ y, en general, con $x = cte$), es visto que se mueve con velocidad $-v$ (hacia la izquierda).

3.4. ¿Cómo se ve en el sistema (x, ct) un evento situado sobre el *eje* cT ?

Si el evento se encuentra sobre el *eje* cT , tiene coordenada $X = 0$, de tal forma que:

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ cT \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{v}{c} cT \\ cT \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\frac{x}{t} = v \quad (* 3)$$

En el sistema (x, ct) un evento situado sobre el *eje* cT (es decir, que tiene coordenada $X = 0$ y, en general, los que tengan $X = cte$), es visto que se aleja con velocidad v (hacia la derecha).

3.5. Invariancia de la velocidad de la luz.

Supongamos un fotón que se mueve con velocidad $\frac{v}{c} = 1$ en el sistema (x, ct) . Esto significa que $x = ct$. Sustituyendo en (2.4):

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{-v}{c} \\ \frac{-v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} (1 - \frac{v}{c}) ct \\ (1 - \frac{v}{c}) ct \end{pmatrix}$$

Con lo que la velocidad de la luz en el sistema (X, cT) es:

$$\frac{V_{luz}}{c} = \frac{X}{cT} = \frac{\gamma (1 - \frac{v}{c}) ct}{\gamma (1 - \frac{v}{c}) ct} = 1 \quad (* 4)$$

El valor de la velocidad de la luz es el mismo en ambos sistemas (cumpliéndose el 2º postulado de la relatividad), y siendo las trayectorias de los rayos de luz en el diagrama de Loedel rectas de pendiente $\pm \frac{\pi}{4}$ respecto a la horizontal.

3.6. Composición relativista de la velocidad.

Llamemos al sistema (x, ct) sistema A , y al (X, cT) sistema B . Supongamos que un cuerpo C se ha movido desde el origen O al evento E . Respecto a B las coordenadas son X y cT , su velocidad en fracción de la de la luz es

$$\frac{V_{BC}}{c} = \frac{X}{cT}$$

donde, por V_{BC} designamos la velocidad del cuerpo C respecto al sistema de referencia B .

Entonces, sabido V_{BC} ¿cuál es la velocidad de C en el sistema A , esto es V_{AC} ? Algebraicamente se puede obtener utilizando las transformadas de Lorentz. Sin recurrir a ellas vamos a utilizar relaciones trigonométricas para deducirlas. En la figura 8 utilizando las relaciones entre los lados de los distintos triángulos se encuentra las siguientes relaciones:

$$x = X \cos \alpha + (cT + X \sin \alpha) \tan \alpha = \frac{X}{\cos \alpha} + cT \tan \alpha$$

$$ct = \frac{(cT + X \sin \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{cT}{\cos \alpha} + X \tan \alpha$$

Dividiendo:

$$\frac{V_{AC}}{c} = \frac{x}{ct} = \frac{\frac{X}{\cos \alpha} + cT \tan \alpha}{\frac{cT}{\cos \alpha} + X \tan \alpha}$$

Y operando:

$$\frac{V_{AC}}{c} = \frac{\frac{X}{cT} + \sin \alpha}{1 + \frac{X}{cT} \sin \alpha} \quad (* 5)$$

Pero hemos definido $\frac{X}{cT} = \frac{V_{BC}}{c}$ y en el diagrama de Loedel sabemos que $\sin \alpha = V_{AB}/c$, así que queda:

$$\frac{V_{AC}}{c} = \frac{\frac{V_{AB}}{c} + \frac{V_{BC}}{c}}{1 + \frac{V_{AB}}{c} \cdot \frac{V_{BC}}{c}} \quad (* 6)$$

que es la composición relativista de velocidad (reducida a 2D).

Con la fórmula (* 6), dada tres velocidades relativas es fácil obtener una velocidad en función de las otras dos (sin necesidad de operaciones algebraicas) utilizando como mnemónico el orden de las letras y sabiendo que $V_{MN} = -V_{NM}$, por ejemplo:

$$\frac{V_{AB}}{c} = \frac{\frac{V_{AC}}{c} + \frac{V_{CB}}{c}}{1 + \frac{V_{AC} V_{CB}}{c^2}} = \frac{\frac{V_{AC}}{c} - \frac{V_{BC}}{c}}{1 - \frac{V_{AC} V_{BC}}{c^2}}$$

3.7. Dilatación del tiempo.

a) Consideremos un suceso E sobre el eje cT , en el sistema B tiene, pues, coordenadas $(0, cT)$, mientras que en el sistema A tiene coordenadas (x, ct) a determinar, según se ve en la figura 10.

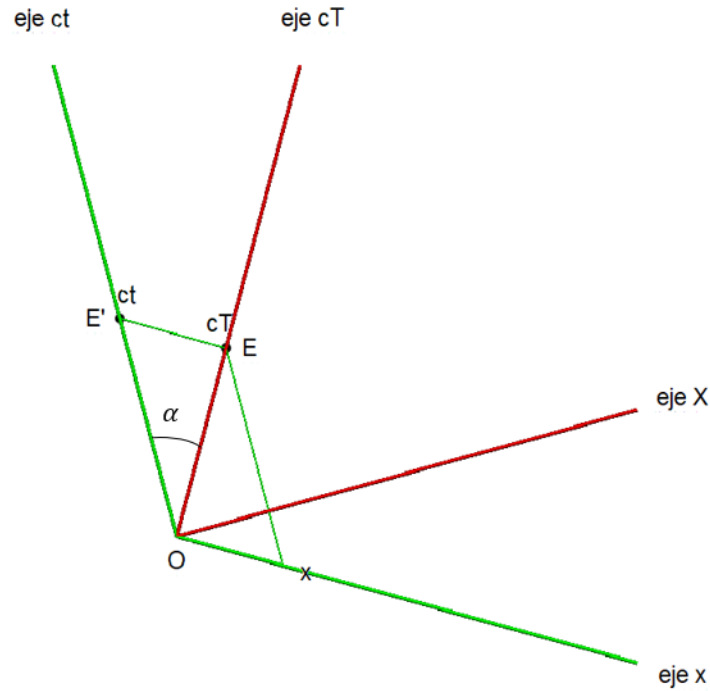


Fig. 10: Dilatación del tiempo, $ct = \frac{cT}{\cos \alpha} > cT$.

En el triángulo rectángulo OEE' se tiene:

$$\overline{OE} = \overline{OE'} \cos \alpha$$

Es decir,

$$cT = \cos \alpha ct \quad (* 7)$$

Y como en el diagrama de Loedel $\sin \alpha = v/c$ ⁴, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$, se tiene:

⁴ En la figura 10, en el triángulo rectángulo OEE' , el cateto $\overline{E'E} = x$, y la hipotenusa $\overline{OE'} = ct$, así que

$$\sin \alpha = \overline{E'E} / \overline{OE'} = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}$$

$$cT = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} ct \quad (* 7')$$

Si E representa la trayectoria de un reloj que se mueve con velocidad v con respecto al sistema A entonces, de acuerdo con (* 7'), el tiempo que marca el reloj B es $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ veces el tiempo que marca el reloj de A .

b) Y de la misma forma, supongamos un suceso S sobre el eje ct , en el sistema A tiene, pues, coordenadas $(0, ct)$, mientras que en el sistema B tiene coordenadas (X, cT) según se ve en la figura 11.

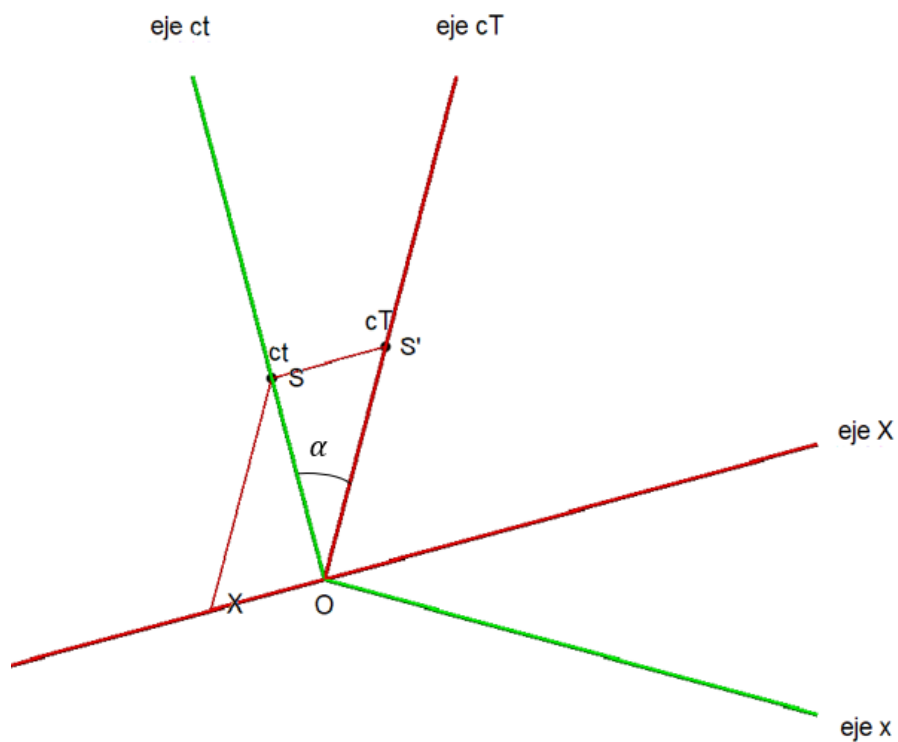


Fig. 11: Dilatación del tiempo, $cT = \frac{ct}{\cos \alpha} > ct$.

Ahora, en la figura 11 se tiene el triángulo rectángulo OSS' con la siguiente relación:

$$\overline{OS} = \overline{OS'} \cos \alpha$$

$$ct = \cos \alpha cT \quad (* 8)$$

Y en este caso es el reloj A el que marcha más lentamente que el reloj B . No hay ninguna contradicción en estas dos relaciones. En la figura 11 hemos cambiado la nomenclatura (se han llamado a los sucesos S y S') para que no haya duda de que son distintos a los de la figura 9.

En el diagrama de Loedel ambos relojes están en pie de igualdad a la hora considerarse en reposo/movimiento, la receta de que es el reloj en movimiento el que marca un tiempo menor no vale, y es con respecto a qué sistema se elija la simultaneidad de los sucesos lo determinante.

En resumen: dado dos sucesos simultáneos E y E' , uno sobre la línea de mundo del reloj B y otro sobre el reloj A , respectivamente, la relación entre los tiempos que marca el reloj A desde el origen a E' (llamémoslo $ct_{OE'}$) y el tiempo que marca el reloj B entre el origen y E (sea cT_{OE}), es:

$$ct_{OE'} > cT_{OE} \text{ si la simultaneidad entre } E \text{ y } E' \text{ es la del sistema } A$$

O,

$$ct_{OE'} < cT_{OE} \text{ si la simultaneidad entre } E \text{ y } E' \text{ es la del sistema } B$$

En la práctica, es el experimento el que determina en qué caso se está. Por ejemplo, en el caso del cálculo de la vida media de los muones atmosféricos en vuelo la simultaneidad del sistema de referencia es el de la Tierra.

3.8. Contracción de la longitud.

En la figura 12, se muestran las trayectorias en el espaciotiempo de los extremos de una barra fija en el sistema B (líneas verdes paralelas al eje CT). Sin pérdida de generalidad se ha tomado el extremo izquierdo de la barra situado en el origen, así que la longitud de la barra (igual a la longitud del segmento \overline{PQ}), según se muestra, es igual al valor de la coordenada $X(Q)$ que es constante. Así,

$$L_0 = X(Q) - X(P) = X(Q)$$

Y se ha dibujado una barra en color rojo entre P y R que es paralela al eje espacial del sistema A . Las coordenadas de sus extremos determinan la longitud de la barra medida por el sistema A , así:

$$L = x(R) - x(P)$$

A diferencia de $X(P)$ y $X(Q)$ que son constantes, las coordenadas $x(P)$ y $x(R)$ crecen con el tiempo (B se mueve con respecto a A con velocidad positiva).

Que la longitud para el sistema A sea la diferencia entre las coordenadas de R y P , en lugar de las de Q y P se debe a que se deben medir la posición de los extremos de la barra en el mismo instante de tiempo para el sistema A .

De acuerdo con la figura 12, existe la siguiente relación trigonométrica:

$$L = x(R) - x(P) = \cos \alpha (X(Q) - X(P)) = \cos \alpha L_0$$

Como en el diagrama de Loedel $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ queda:

$$L = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} L_0 \quad (* 9)$$

Lo que significa que la longitud de una barra en movimiento con velocidad v es un factor $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ veces la longitud L_0 de una barra en reposo.

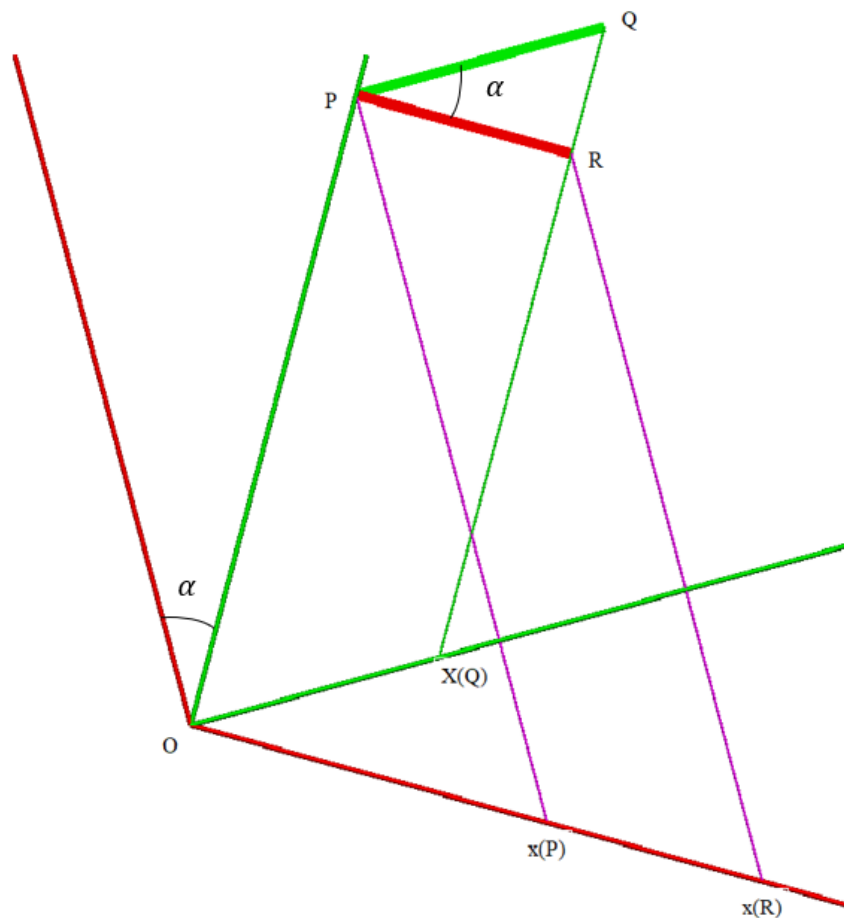


Fig. 12: Contracción de la longitud de la barra PQ observada desde A .

En el siguiente enlace se puede ver: [Movimiento en el espaciotiempo de la barra fija en B](#).

De la misma forma, una barra fija en el sistema A será vista contraída en el sistema B . En la figura 12 se muestra el caso. Ahora la longitud propia (la correspondiente al sistema en reposo) es:

$$L_0 = x(Q) - x(P) = x(Q)$$

Y la barra en color verde entre Q y R es paralela al eje espacial del sistema B. Las coordenadas de sus extremos determinan la longitud de la barra medida por el sistema A, así:

$$L = X(Q) - X(R)$$

Estas coordenadas varían con el tiempo, concretamente, disminuyen con el tiempo (A se mueve con respecto a B con velocidad negativa).

Ahora, en la figura 13, se tiene la siguiente relación trigonométrica:

$$L = X(Q) - X(R) = \cos \alpha (x(Q) - x(P)) = \cos \alpha L_0$$

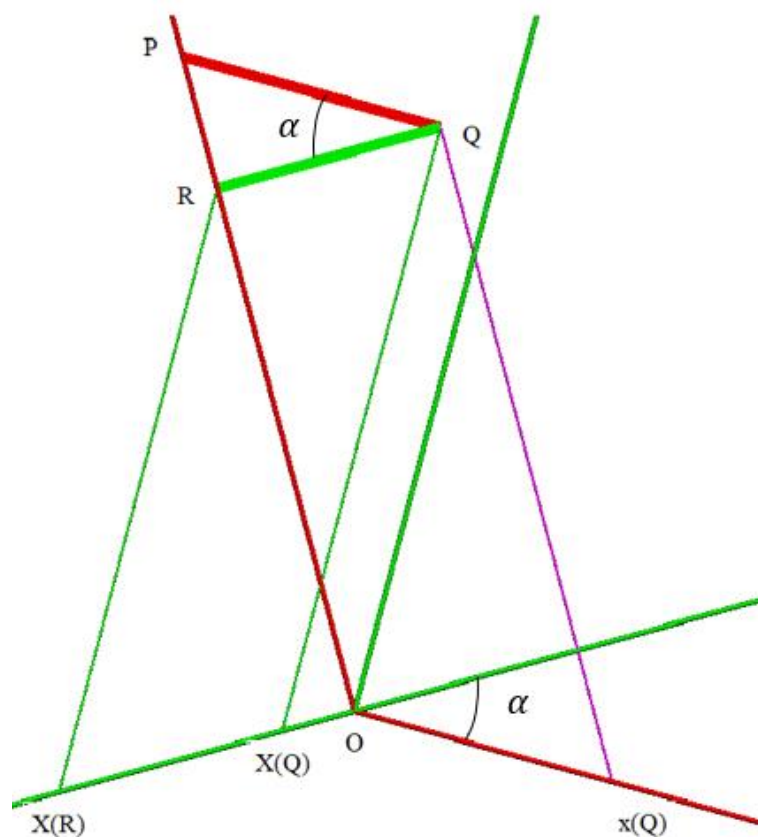


Fig. 13: Contracción de la longitud de la barra PQ observada desde B.

En el siguiente enlace se puede ver: [Movimiento en el espaciotiempo de la barra fija en A.](#)

Y, como es lógico, se obtiene la misma relación (* 14), los sistemas A y B están en pie de igualdad y la relación entre longitudes de objeto en movimiento y en reposo deben ser la misma.

En el anexo 5 se estudia la contracción utilizando las transformadas de Lorentz.

4. DIAGRAMA DE MINKOWSKI

Una de las primeras representaciones del espaciotiempo fueron los diagramas de Minkowski. Es una representación geométrica de las transformadas de Lorentz. Mostramos cómo se obtiene partiendo de éstas:

$$X = \gamma \left(x - \left(\frac{v}{c} \right) ct \right) \quad (* 1)$$

$$cT = \gamma \left(ct - \left(\frac{v}{c} \right) x \right) \quad (* 2)$$

El eje cT se corresponde con que $X = 0$, así que, si en la ecuación (* 1) hacemos $X = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} X = 0 = \gamma \left(x - \left(\frac{v}{c} \right) ct \right) &\Rightarrow 0 = x - \left(\frac{v}{c} \right) ct \Rightarrow \\ ct &= \left(\frac{1}{v/c} \right) x \quad (* 3) \end{aligned}$$

La ecuación (* 3) es una recta de pendiente c/v , o lo que es lo mismo, si el ángulo se mide respecto a la vertical, $\tan \alpha = v/c$, siendo v/c la velocidad relativa de B respecto a A en unidades de c .

Ahora vamos a obtener la representación del eje espacial. Para el sistema B , el eje espacial lo forman el conjunto de eventos (ct, x) que hacen $T = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} cT = 0 = \gamma \left(ct - \left(\frac{v}{c} \right) x \right) &\Rightarrow 0 = ct - \left(\frac{v}{c} \right) x \Rightarrow \\ ct &= \left(\frac{v}{c} \right) x \quad (* 4) \end{aligned}$$

La ecuación (* 4) es una recta de pendiente v/c (se recuerda que el tiempo se representa en el eje y), es decir, si el ángulo se mide respecto a la horizontal, $\tan \alpha = v/c$. En la figura 14 se muestra como quedan los ejes para el sistema B .

Supongamos que en el diagrama de Minkowski pretendemos utilizar las relaciones trigonométricas entre las coordenadas de ambos sistemas. En la figura 15 se muestra cómo serían esas relaciones.

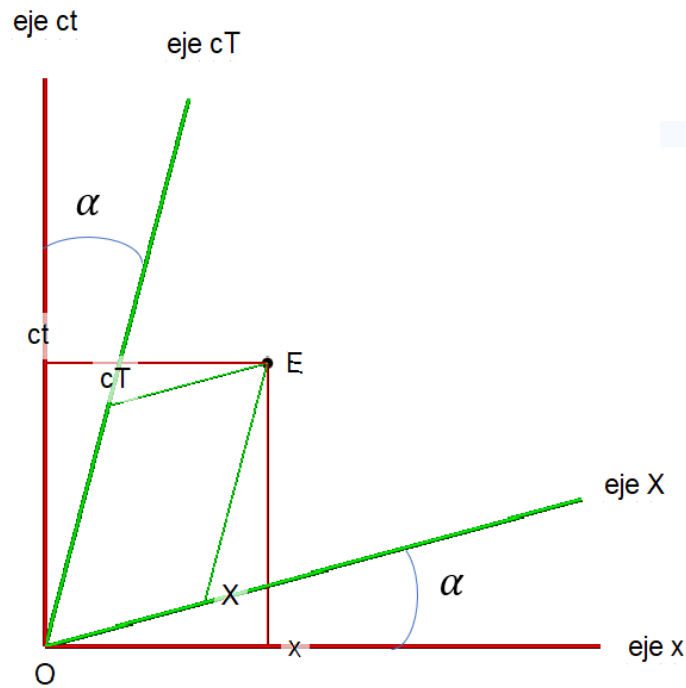


Fig. 14: Diagrama de Minkowski para $\frac{v}{c} = \tan \alpha$.

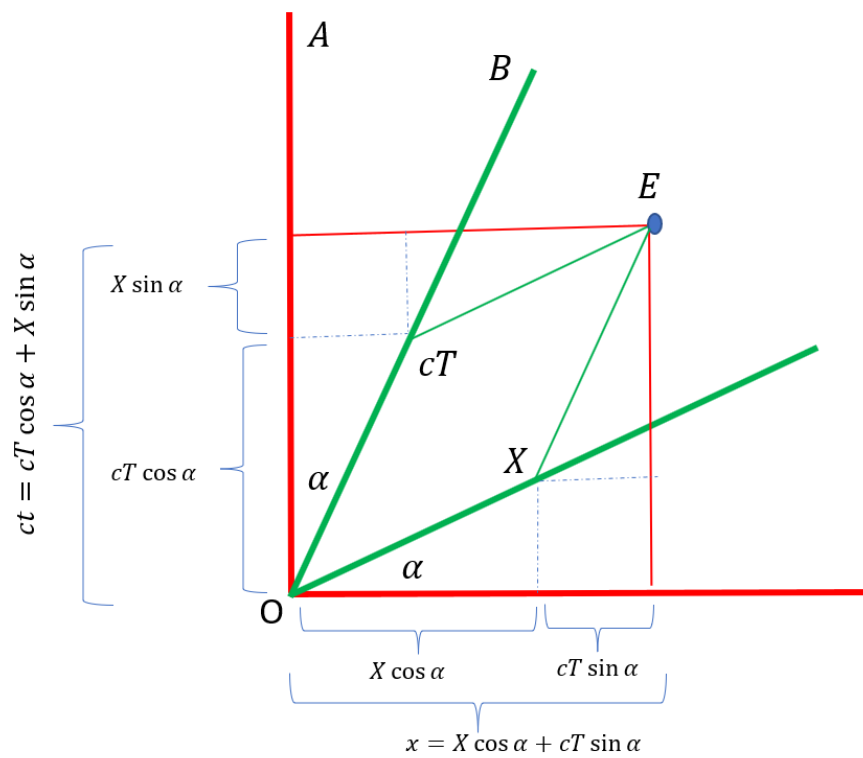


Fig. 15: relaciones trigonométricas en un diagrama de Minkowski.

Y se deberían cumplir las siguientes ecuaciones:

$$x = cT \sin \alpha + X \cos \alpha \quad (* 5)$$

$$ct = cT \cos \alpha + X \sin \alpha \quad (* 6)$$

Pero en este caso, si calculamos el intervalo espacio-temporal, tenemos:

$$(ct)^2 - x^2 = [(cT)^2 - X^2] (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (* 7)$$

lo que supone que no se verifique la igualdad del intervalo para los dos sistemas de referencia. La forma de que se mantenga la igualdad del intervalo espacio temporal para los dos sistemas es modificar la escala con que se representan las coordenadas del sistema B .

Para facilitar el razonamiento supongamos que E se encuentra sobre el *eje* cT (véase figura 16). En este caso (* 5) y (* 6) quedan reducidas a:

$$ct = cT \cos \alpha \quad (* 8)$$

$$x = cT \sin \alpha \quad (* 9)$$

Estas relaciones serían válidas si las escalas con que se miden t y T fueran iguales. Como no lo son según muestra (* 7), debemos razonar con las longitudes, véase figura 16.

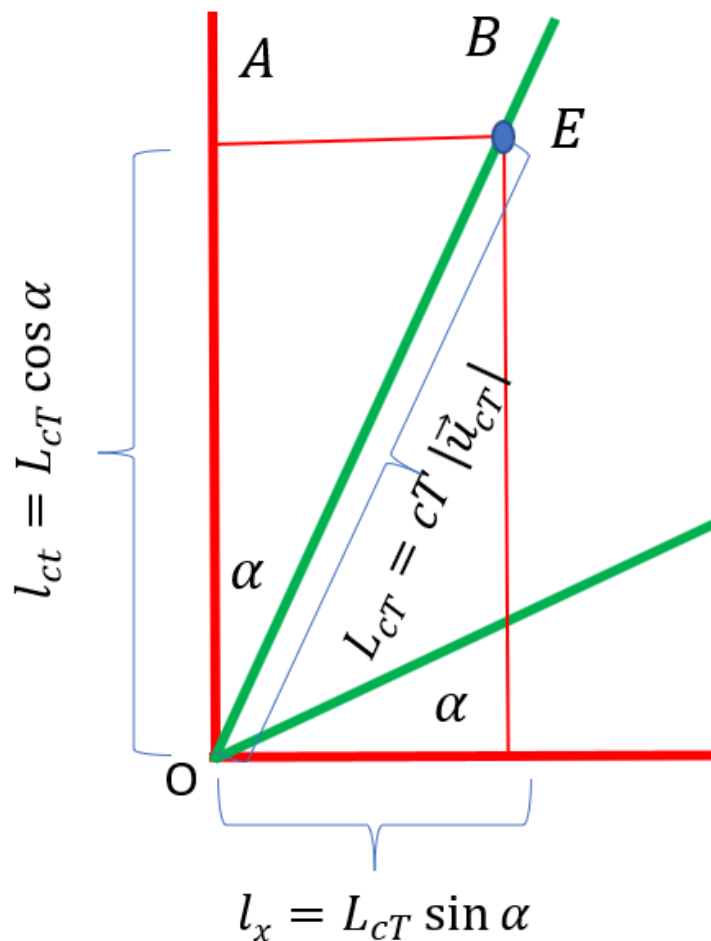


Fig. 16: Las unidades de los dos sistemas tienen distintas longitudes.

En lugar de (* 8) lo que se debe utilizar es:

$$l_{ct} = L_{cT} \cos \alpha \quad (* 10)$$

donde l_{ct} es la longitud medida sobre el *eje ct*, que es proporcional a la coordenada ct y a su escala, es decir:

$$l_t = ct |\vec{u}_{ct}|$$

Y L_T es la longitud medida sobre el *eje cT*, que es proporcional a la coordenada cT y a su escala, es decir:

$$L_T = cT |\vec{u}_{cT}|$$

Sustituyendo ambas longitudes en (* 10):

$$ct |\vec{u}_{ct}| = cT |\vec{u}_{cT}| \cos \alpha \quad (* 11)$$

Y si suponemos que la escala sobre el *eje ct* es la unidad, es decir, $|\vec{u}_{ct}| = 1$, entonces:

$$|\vec{u}_{cT}| = \frac{ct}{cT \cos \alpha} \quad (* 12)$$

Y dado que la relación entre el tiempo propio T y el coordenado t (visto en el subapartado 3.7) es:

$$t = \frac{T}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

(* 12) queda:

$$|\vec{u}_{cT}| = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{1}{\cos \alpha} \quad (* 13)$$

Y como $\tan \alpha = \frac{v}{c}$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + (v/c)^2}$$

(* 13) se reduce a:

$$|\vec{u}_{cT}| = \frac{\sqrt{1 + (v/c)^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (* 14)$$

El mismo razonamiento realizado para la escala $|\vec{u}_{cT}|$ del eje temporal, se puede aplicar a la escala del eje espacial X . Y se obtiene que $|\vec{u}_X| = |\vec{u}_{cT}|$, dada la suposición $|\vec{u}_{ct}| = |\vec{u}_x| = 1$ (que hace que las líneas de mundo de los rayos de luz sean de $\mp 45^\circ$).

Así que para poder realizar cálculos trigonométricos con los diagramas de Minkowski es necesario que se gradúen los ejes del sistema B . Un ejemplo de diagrama calibrado se puede ver en la figura 17, para $v = c/2$ que da un $|\vec{u}_x| = |\vec{u}_{cT}| = 1,291$.

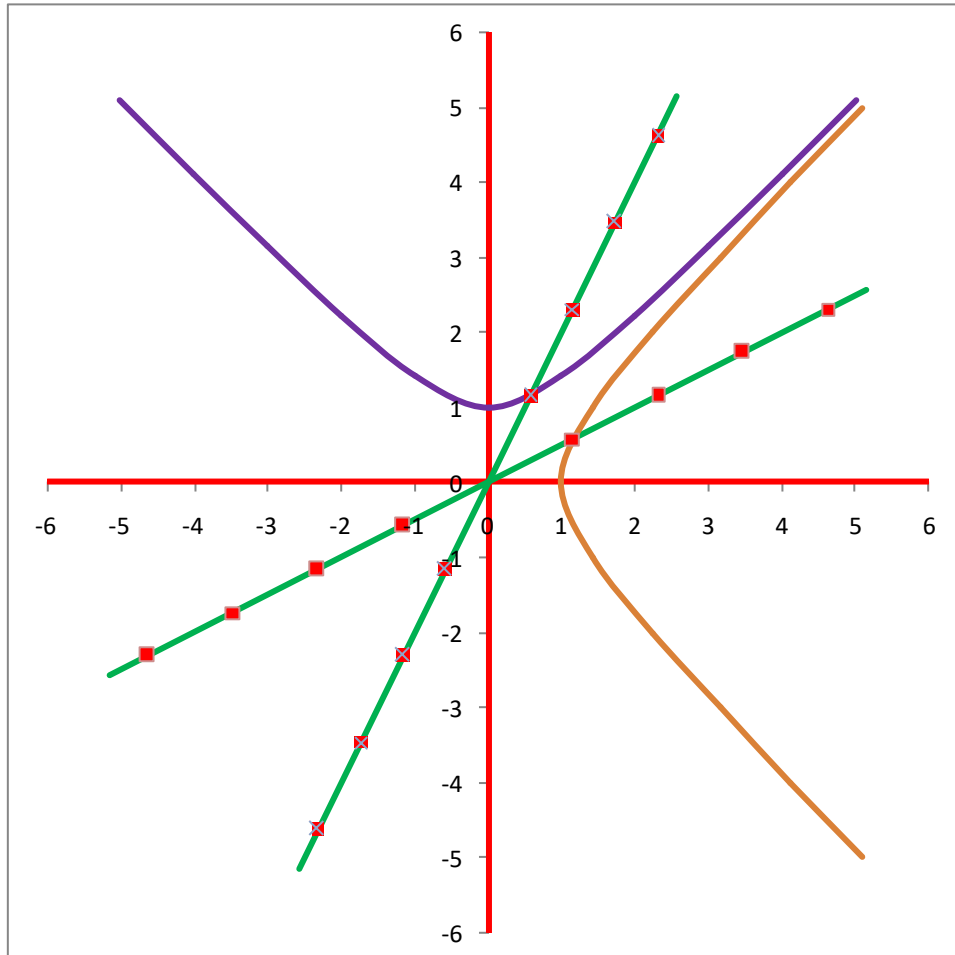


Fig. 17: Las unidades del sistema B tienen mayor longitud gráfica que las de A .

En el anexo 3, que obtiene el diagrama de Minkowski introduciendo la métrica pseudoeuclídea, se muestra de otra forma el motivo por el que las unidades del sistema B se dibujan con distinta longitud. Para evitar este inconveniente (que el valor de las coordenadas no se corresponde con la longitud que las representa), Bondi utiliza los diagramas de Minkowski (sin calibrar) con intercambio de señales de luz entre eventos. Esto le permite, a través del método del radar (o Milne), asignar valores a las coordenadas temporal y espacial.

5. DIAGRAMA DE LOEDEL COMO UN DIAGRAMA DOBLE DE MINKOWSKI

La doble asimetría (la de unidades de distinta longitud y la de presentar un sistema en reposo y otro en movimiento) que muestran los diagramas de Minkowski se puede evitar si se utiliza el diagrama de Loedel. En el diagrama de Loedel las unidades de los ejes de ambos sistemas se representan con la misma longitud, por tanto, se puede realizar cálculos utilizando relaciones trigonométricas y ninguno de los sistemas ocupa el privilegio de estar en reposo con respecto al otro.

La relación entre el diagrama de Loedel y de Minkowski, Enrique Loedel lo trata en su libro en el apartado 44 “Relación entre la representación de Minkowski y la nuestra”. Yo lo trata un poco distinto.

En la figura 14 se representaba un sistema B que se mueve con respecto al sistema A (considerado en reposo) con velocidad $\frac{v}{c} = \tan \alpha$. Consideremos ahora un sistema C que se mueve con velocidad $\frac{v}{c} = -\tan \alpha$ con respecto a A . El diagrama de Minkowski para este caso de velocidad negativa es el de la figura 18:

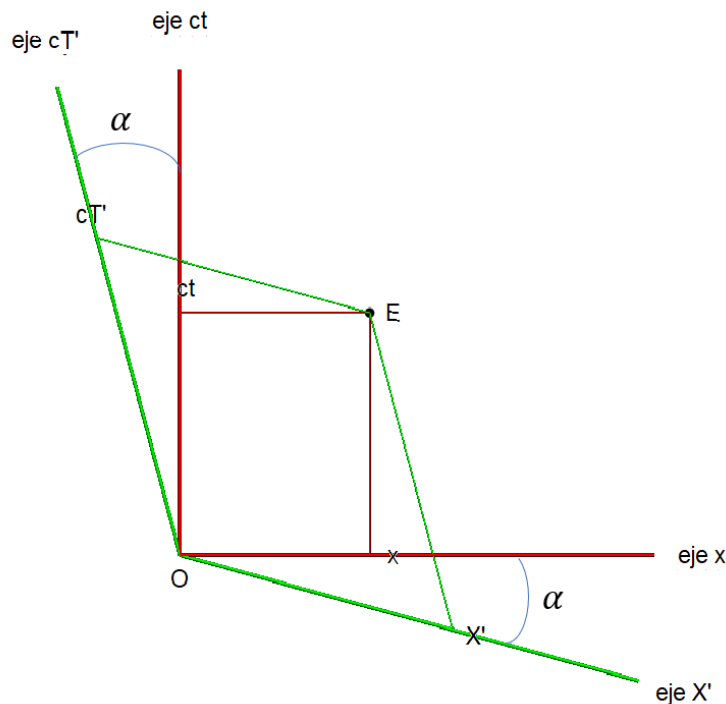


Fig. 18: Diagrama de Minkowski para velocidad negativa

Superponiendo los dos diagramas tenemos el de la figura 19, y si nos olvidamos de representar los ejes correspondientes al sistema en “reposo”, lo que queda es el diagrama de Loedel.

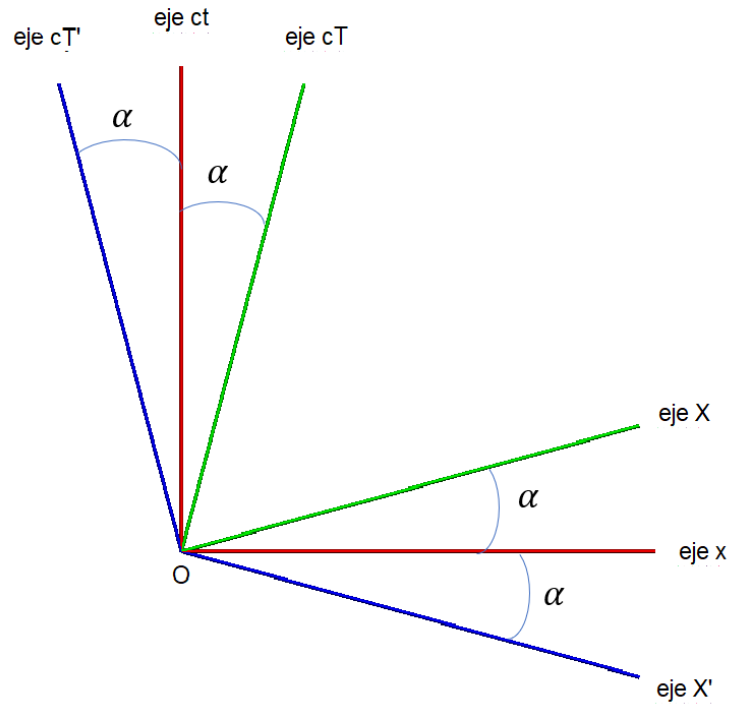


Fig. 19: Un diagrama doble de Minkowski con velocidades $\frac{v}{c} = \pm \tan \alpha$.

En la figura 19 si aplicamos la composición relativista de velocidades vista en el subapartado 3.6, adaptado a nuestro caso, se tiene:

$$\frac{V_{CB}}{c} = \frac{\frac{V_{CA}}{c} + \frac{V_{AB}}{c}}{1 + \frac{V_{CA} V_{AB}}{c^2}} \quad (* 1)$$

Como $\frac{V_{AC}}{c} = -\tan \alpha$, $\frac{V_{AB}}{c} = \tan \alpha$, queda:

$$\frac{V_{CB}}{c} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha \quad (* 2)$$

Que es la explicación de que en un diagrama de Loedel la velocidad relativa entre sistemas es igual al seno del ángulo entre ejes.

El hecho de que el factor de escala de B y de C sea el mismo -ya que la ecuación 4.14 que da el factor de escala depende de la velocidad al cuadrado:

$$escala = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (* 3)$$

permite operar con relaciones trigonométricas.

Del diagrama de Minkowski para A y B , utilizando la ecuación (A3.5) se tiene, por un lado:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ X \end{pmatrix} \quad (* 4)$$

Por otro,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT' \\ X' \end{pmatrix} \quad (* 5)$$

Igualando y operando:

$$\begin{pmatrix} cT' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} cT' \\ X' \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} cT' \\ X' \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \begin{pmatrix} 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} cT' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos 2\alpha} & \tan 2\alpha \\ \tan 2\alpha & \frac{1}{\cos 2\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ X \end{pmatrix} \quad (* 6)$$

(* 6) es la misma ecuación que la (A2.7) vista, si se tiene en cuenta que en el anexo 2 la gráfica A2.1 muestra un ángulo α entre los ejes de los sistemas de referencia, mientras que aquí, en la figura 19 el ángulo entre ejes es 2α .

ANEXO 1: RELACIÓN ENTRE COORDENADAS EN EL DIAGRAMA DE BREHME

Vamos a mostrar cuál es la relación entre las coordenadas de uno y otro sistema, y ver que la transformación que media entre ella es la de Lorentz.

Utilizamos la figura 5, que repetimos aquí como figura A1.1. Sea \vec{r} el vector que va desde O a E . En el sistema de coordenadas (X, cT) el vector se puede expresar como:

$$\vec{r} = X\vec{u}_X + cT\vec{u}_{cT} \quad (A1.1)$$

donde \vec{u}_X es el vector unitario del eje X , y \vec{u}_{cT} el del eje cT . Por las mismas, en el sistema de coordenadas (x, ct) ,

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + ct\vec{u}_{ct} \quad (A1.2)$$

Por tanto,

$$X\vec{u}_X + cT\vec{u}_{cT} = x\vec{u}_x + ct\vec{u}_{ct} \quad (A1.3)$$

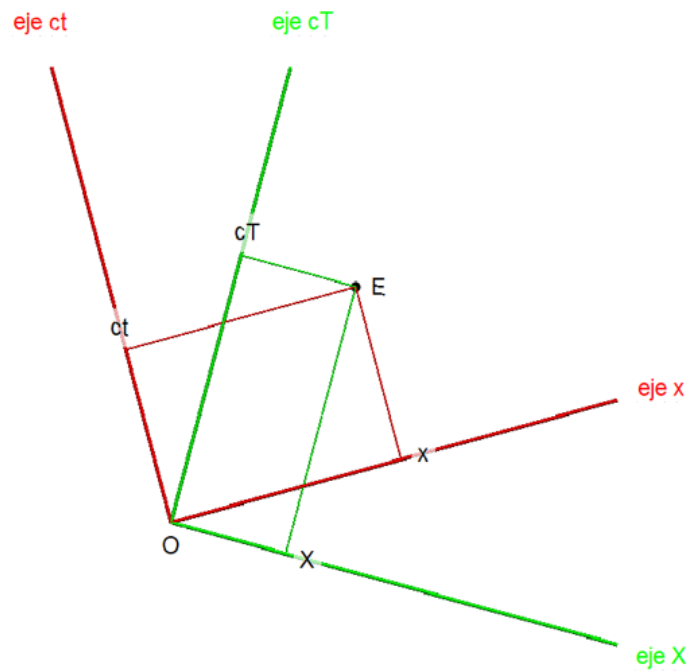


Fig. A1.1: Similar a figura 5

Multiplicando cada miembro de (A1.3) por el vector unitario \vec{u}_X se obtiene:

$$(X\vec{u}_X + cT\vec{u}_{cT}) \cdot \vec{u}_X = (x\vec{u}_x + ct\vec{u}_{ct}) \cdot \vec{u}_X$$

$$X = x(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_X) + ct(\vec{u}_{ct} \cdot \vec{u}_X)$$

Como⁵

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_X = |\vec{u}_x| |\vec{u}_X| \cos(\vec{u}_x, \vec{u}_X) = \cos \alpha$$

$$\vec{u}_{ct} \cdot \vec{u}_X = \cos(\vec{u}_{ct}, \vec{u}_X) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

queda:

$$X = x \cos \alpha - ct \sin \alpha \quad (A1.4)$$

Si ahora se multiplica cada miembro de (A1.3) por el vector unitario \vec{u}_{cT} se obtiene:

$$(X\vec{u}_X + cT\vec{u}_{cT}) \cdot \vec{u}_{cT} = (x\vec{u}_x + ct\vec{u}_{ct}) \cdot \vec{u}_{cT}$$

$$cT = x(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_{cT}) + ct(\vec{u}_{ct} \cdot \vec{u}_{cT})$$

$$cT = x \sin \alpha + ct \cos \alpha \quad (A1.5)$$

Las ecuaciones (A1.4) y (A1.5) se pueden expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (A1.6)$$

Ahora, si se intercambian los nombres X por x y la pertenencia de los ejes a los sistemas como en la figura 6, la ecuación (A1.6) queda:

⁵ El producto escalar (euclídeo) de dos vectores es igual al producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman. También es igual a la suma de los productos de las componentes. Los vectores unitarios en la figura A1.1 tienen como coordenadas en el sistema horizontal/vertical:

$$\vec{u}_x = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\vec{u}_{ct} = \left(-\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\vec{u}_X = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\vec{u}_{cT} = \left(\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

Y, sus productos son:

$$\vec{u}_{ct} \cdot \vec{u}_X = \left(-\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2}\right) = -2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = -\sin \alpha$$

Etc.

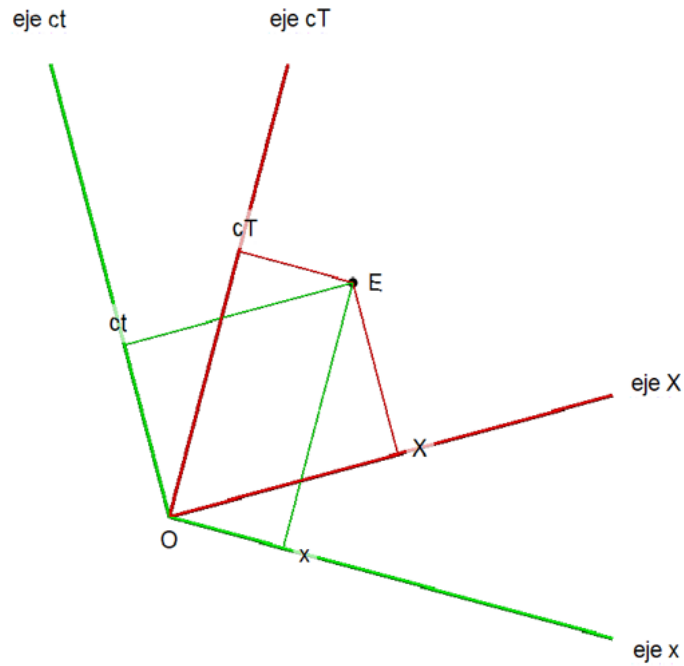


Fig. A1.2: Diagrama de Brehme y coordenadas de un evento E

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} \quad (A1.6')$$

Que es una forma rara de relacionar coordenadas al mezclarse las de un sistema y otro. Transformamos las ecuaciones para situar en cada miembro sólo las del mismo sistema:

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha - ct \sin \alpha \\ cT &= X \sin \alpha + ct \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{\cos \alpha} + ct \tan \alpha \\ cT &= X \sin \alpha + ct \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{\cos \alpha} + ct \tan \alpha \\ cT &= \left(\frac{x}{\cos \alpha} + \tan \alpha ct \right) \sin \alpha + ct \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{\cos \alpha} + ct \tan \alpha \\ cT &= x \tan \alpha + \frac{ct}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Quedando, finalmente:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \alpha} & \tan \alpha \\ \tan \alpha & \frac{1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (A1.7)$$

Si ahora consideramos que el ángulo α entre sistemas es tal que se relaciona con la velocidad relativa entre ambos según el seno del ángulo que forman,

$$\frac{v}{c} = \sin \alpha \quad (A1.8)$$

Se tiene que,

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (A1.9)$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (A1.10)$$

Y la ecuación (A1.7) queda:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (A1.11)$$

que son las transformadas de Lorentz para dos dimensiones.

ANEXO 2: RELACIÓN ENTRE COORDENADAS EN EL DIAGRAMA DE LOEDEL

Vamos a mostrar cuál es la relación entre las coordenadas de uno y otro sistema, y ver que la transformación que media entre ella es la de Lorentz. Nos apoyamos en el diagrama de la figura 8 que reproducimos aquí como figura A2.1:

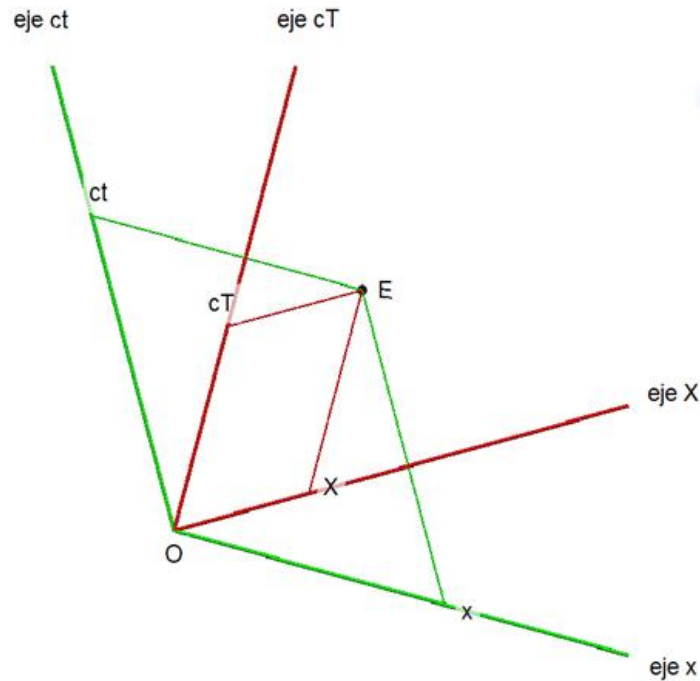


Fig. A2.1: Diagrama de Loedel y coordenadas de un evento E

Sea \vec{r} el vector que va desde O a E . En el sistema de coordenadas (x, ct) el vector se puede expresar como:

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + ct\vec{u}_{ct} \quad (A2.1)$$

donde \vec{u}_x es el vector unitario del *eje x*, y \vec{u}_{ct} el del *eje ct*. Por las mismas, en el sistema de coordenadas (X, cT) ,

$$\vec{r} = X\vec{u}_X + cT\vec{u}_{cT} \quad (A2.2)$$

Igualando ambas expresiones del vector $\vec{r} = \overrightarrow{OE}$:

$$X\vec{u}_X + cT\vec{u}_{cT} = x\vec{u}_x + ct\vec{u}_{ct}$$

Si multiplicamos ambos miembros por \vec{u}_x

$$(X\vec{u}_X + cT\vec{u}_{cT}) \cdot \vec{u}_x = (x\vec{u}_x + ct\vec{u}_{ct}) \cdot \vec{u}_x$$

$$X(\vec{u}_X \cdot \vec{u}_x) = x + ct(\vec{u}_{ct} \cdot \vec{u}_x)$$

$$X \cos \alpha = x - ct \sin \alpha$$

$$X = \frac{x}{\cos \alpha} - ct \tan \alpha \quad (A2.3)$$

Y si multiplicamos por \vec{u}_{ct}

$$(X\vec{u}_x + cT\vec{u}_{cT}) \cdot \vec{u}_{ct} = (x\vec{u}_x + ct\vec{u}_{ct}) \cdot \vec{u}_{ct}$$

$$cT(\vec{u}_{cT} \cdot \vec{u}_{ct}) = x(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_{ct}) + ct$$

$$cT \cos \alpha = -x \sin \alpha + ct$$

$$cT = -x \tan \alpha + \frac{ct}{\cos \alpha} \quad (A2.4)$$

Que se puede expresar matricialmente, como:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \alpha} & -\tan \alpha \\ -\tan \alpha & \frac{1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (A2.5)$$

Si, al igual que para el diagrama de Brehme, se toma $\frac{v}{c} = \sin \alpha$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad (A2.6)$$

Si nos fijamos en A2.5, el determinante de la matriz es uno. Así que su inversa es:

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \alpha} & \tan \alpha \\ \tan \alpha & \frac{1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} \quad (A2.7)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ cT \end{pmatrix} \quad (A2.8)$$

ANEXO 3: DIAGRAMA DE MINKOWSKI OBTENIDO DE LA MÉTRICA

Consideremos el sistema de referencia cartesiano asociado al “sistema en reposo” (x, ct) , que llamaremos sistema de referencia A , y un sistema en movimiento (X, cT) , que llamaremos sistema de referencia B , figura A3.1.

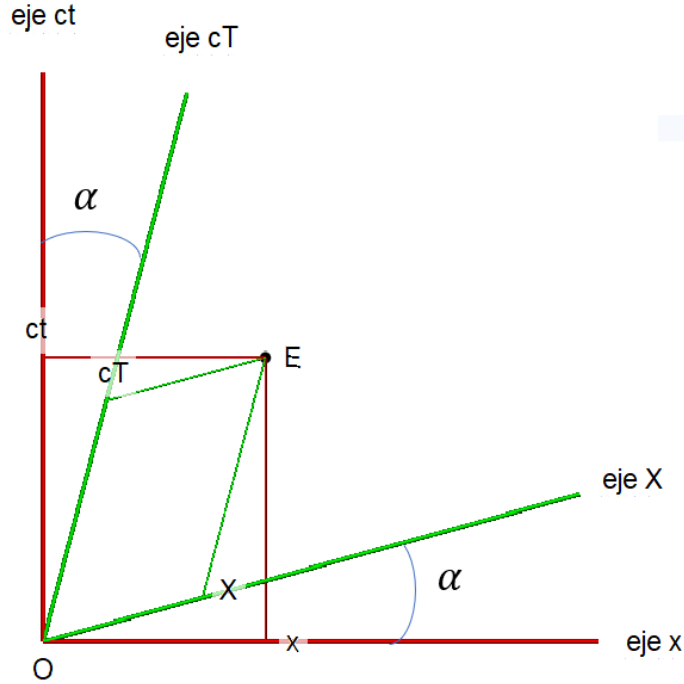


Fig. A3.1: Diagrama de Minkowski para una velocidad $\tan \alpha = v/c$

En relatividad se suele utilizar la coordenada temporal como coordenada “0” y a las x, y, z como coordenadas 1, 2, 3. Por este motivo vamos a cambiar el orden de las componentes, de tal forma que el vector en 2D va a tener como componentes (ct, x) y (cT, X) , respectivamente. Así, sea el vector $\vec{r} = \overrightarrow{OE}$, en cada sistema los vectores vendrán dados por:

$$\vec{r} = x\vec{i} + ct\vec{j} = (ct, x) \quad (A3.1)$$

$$\vec{r} = X\vec{u}_X + cT\vec{u}_{cT} = (cT, X) \quad (A3.2)$$

Ahora se va a dotar al espacio de la métrica de Minkowski que nos va a permitir asignar las “longitudes” y los ángulos entre vectores. La forma general de un producto escalar de dos vectores \vec{V} y \vec{W} viene dado por el producto

$$(W^0 \ W^1 \ W^2 \ W^3) \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 g_{ij} W^i V^j$$

Cuando la matriz G es la identidad se obtiene el producto escalar euclídeo. Y cuando G

es igual a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ se obtiene el producto de la métrica de Minkowski⁶,

que en 2 dimensiones queda reducido a:

$$(W^0 \quad W^1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \end{pmatrix} = W^0 V^0 - W^1 V^1$$

Se recuerda que el producto escalar euclídeo en un espacio vectorial cumple las siguientes propiedades:

- 1) $\vec{V} \cdot \vec{W} = \vec{W} \cdot \vec{V}$
- 2) $(\lambda \vec{V} + \mu \vec{W}) \cdot \vec{Z} = \lambda \vec{V} \cdot \vec{Z} + \mu \vec{W} \cdot \vec{Z}$
- 3) $\vec{V} \cdot \vec{V} > 0$ para todo $\vec{V} \neq 0$

Pero el producto pseudoeuclídeo no cumple la propiedad tercera, de tal forma que el producto escalar de un vector por sí mismo puede ser negativo o incluso cero, aunque el vector no sea nulo.

Consideramos ahora los vectores unitarios de los ejes en el diagrama. Si el *eje cT* hace un ángulo α con el eje vertical⁷ (véase figura A3.1), se tiene:

$$\vec{u}_{cT} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

[Recuérdese que hemos cambiado el orden y ahora la componente temporal se escribe antes que la componente espacial, es decir, $\cos \alpha$ es la componente y y $\sin \alpha$ la componente x .]

El vector \vec{u}_{cT} tiene módulo 1 en la métrica euclídea, pero no en la de Minkowski ya que:

$$\vec{u}_{cT} \cdot \vec{u}_{cT} = (\cos \alpha \quad \sin \alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha^8$$

que excepto para $\alpha = 0$ es distinto de 1. Para que sea módulo unidad el vector \vec{u}_{cT} hay que dividirlo por $\sqrt{\cos 2\alpha}$. Así que definimos:

$$\vec{u}_{cT} = \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right) \quad (A3.3)$$

⁶ Otros definen la matriz de la métrica de Minkowski como $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Con una u otra se obtiene

las mismas relaciones.

⁷ En tanto que $\tan \alpha = v/c$, α es tal que: $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$. Y cuando la velocidad sea negativa, $\tan \alpha = -v/c$ y α es tal que: $-\frac{\pi}{4} < \alpha \leq 0$.

⁸ Se utiliza la relación $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$. Que, cuando $A = B$, queda $\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$

De esta forma sí se cumple que:

$$\vec{u}_{cT} \cdot \vec{u}_{cT} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} (\cos \alpha \quad \sin \alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} = 1$$

De la misma forma, \vec{u}_X el vector director del *eje X*, que hace un ángulo α con la horizontal tiene módulo 1 en la métrica euclídea, pero no en la de Minkowski ya que:

$$\vec{u}_X \cdot \vec{u}_X = (\sin \alpha \quad \cos \alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$$

Ya hemos indicado que la métrica de Minkowski no cumple la propiedad 3 del producto escalar euclídeo por eso puede tener un valor negativo. Pero si dividimos el vector por $\sqrt{\cos 2\alpha}$:

$$\vec{u}_X = \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right) \quad (A3.4)$$

se obtiene que $\vec{u}_X \cdot \vec{u}_X = -1$

Se ha dividido por $\sqrt{\cos 2\alpha}$ y no por $i\sqrt{\cos 2\alpha}$, primero porque las componentes de los vectores son reales y, segundo, porque no se quiere alterar la naturaleza del vector \vec{u}_X que debe ser de tipo espacial lo que implica que $\vec{u}_X \cdot \vec{u}_X < 0^9$.

Ahora que tenemos definidos los vectores unitarios, podemos buscar las relaciones entre las coordenadas utilizando el procedimiento ya visto en otro anexo.

Tomamos como vectores unitarios en la figura A3.1:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{cT} &= \vec{j} = (1, 0) \\ \vec{u}_X &= \vec{i} = (0, 1) \\ \vec{u}_{cT} &= \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right) \\ \vec{u}_X &= \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right) \end{aligned}$$

Se igualan las expresiones (A3.1) y (A3.2):

$$ct\vec{j} + x\vec{i} = cT\vec{u}_{cT} + X\vec{u}_X$$

⁹ El producto escalar de la métrica de Minkowski define el intervalo espaciotemporal s :

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = s^2 = c^2 t^2 - x^2$$

Cuando $s^2 > 0$ el intervalo tiene naturaleza temporal, y $s = c\tau$, en este caso existe un sistema de referencia (llamémosle B), concretamente, el que se mueve con velocidad $v = x/t$, en el que el suceso origen y el suceso extremo del vector \vec{r} sucede en el mismo lugar (tienen la misma coordenada espacial X en el sistema B), entonces τ es el tiempo que marcaría un reloj fijo en B (que se mueve con velocidad v respecto al sistema A) entre el suceso origen y extremo de \vec{r} .

Cuando $s^2 < 0$ el intervalo tiene naturaleza espacial, y mide una longitud, tal que $l = -s = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$. En este caso existe un sistema de referencia (el que se mueve con velocidad $v = t/x$) en el que el suceso origen y el suceso extremo del vector \vec{r} sucede simultáneamente (tienen la misma coordenada temporal T), entonces l es la longitud que mide una regla en reposo el tiempo que marcaría un reloj en movimiento entre el suceso origen y extremo.

Si multiplicamos escalarmente ambos miembros por \vec{j} se obtiene la ecuación:

$$ct = (cT\vec{u}_{cT} + X\vec{u}_X) \cdot \vec{j} = cT \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} + X \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$$

Y si multiplicamos por \vec{i} ,

$$-x = (cT\vec{u}_{cT} + X\vec{u}_X) \cdot \vec{i} = -cT \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} - X \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$$

La ecuación matricial que queda es:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ X \end{pmatrix} \quad (A3.5)$$

Y su inversa, es:

$$\begin{pmatrix} cT \\ X \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (A3.6)$$

Se puede comprobar que esta transformación de coordenadas mantiene invariante el valor del intervalo espaciotemporal de las transformada de Lorentz.

$$s^2 = c^2T^2 - X^2 = c^2t^2 - x^2 \quad (A3.7)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} c^2T^2 - X^2 &= \frac{1}{\cos 2\alpha} ((\cos \alpha ct - \sin \alpha x)^2 - (-\sin \alpha ct + \cos \alpha x)^2) \\ &= \frac{1}{\cos 2\alpha} ((\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) c^2t^2 - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)x^2) = c^2t^2 - x^2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{v}{c} = \tan \alpha$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha (1 - \tan^2 \alpha) = \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Así que (A3.6) se convierte en las conocidas transformadas de Lorentz:

$$\begin{pmatrix} cT \\ X \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Al introducir otra métrica, cambian los ángulos que forman los vectores, por ejemplo, aunque en el diagrama el ángulo dibujado que forman \vec{u}_{cT} y \vec{u}_X es $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$, en la métrica de Minkowski son perpendiculares. En efecto:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{cT} \cdot \vec{u}_X &= \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{\cos 2\alpha} (\cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) = 0 \end{aligned}$$

En este sentido, los vectores paralelos al *eje* cT mantiene constante la coordenada X , mientras que los vectores paralelos al *eje* X mantiene constante la coordenada cT . Es decir, que las líneas de simultaneidad para el sistema de referencia (cT, X) son las líneas paralelas al *eje* X . De forma similar, para el sistema de referencia (ct, x) las líneas de simultaneidad son las paralelas al *eje* x , así que dos eventos que son simultáneos para uno de los sistemas dejan de serlo para el otro.

Un inconveniente del diagrama de Minkowski es que al dibujar ambos sistemas se representan de forma asimétrica. Por un lado, hay un sistema que se muestra en reposo mientras que hay otro asociado al movimiento. Además, las escalas de las unidades dibujadas sobre los ejes son desiguales para ambos sistemas. Para el que está en reposo los vectores unitarios se dibujan con longitud 1, mientras que para los vectores \vec{u}_{cT} y \vec{u}_X se dibujan con una longitud

$$\frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Consideremos los vectores \vec{u}_{cT} ,

$$\vec{u}_{cT} = \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right)$$

Sus componentes cartesianas son ct para el eje vertical, y x para el horizontal:

$$ct = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \cos \alpha$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \sin \alpha$$

Si elevamos al cuadrado y restamos obtenemos la ecuación de una hipérbola:

$$(ct)^2 - x^2 = \frac{1}{\cos 2\alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1$$

Lo que significa que el extremo del vector \vec{u}_{cT} se sitúa sobre una hipérbola cuadrada (de semiejes $a = b = 1$) cuyo eje focal está alineado con el *eje ct*, con foco en $F(0, \sqrt{2})$ y vértice en $V(0,1)$.

De la misma forma, el extremo de los vectores \vec{u}_x ,

$$\vec{u}_x = \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}, \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \right)$$

tienen coordenadas cartesianas:

$$ct = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \sin \alpha$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \cos \alpha$$

que verifican la ecuación:

$$x^2 - (ct)^2 = \frac{1}{\cos 2\alpha} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1$$

Lo que significa que el extremo del vector \vec{u}_x se sitúa sobre una hipérbola cuadrada (de semiejes $a = b = 1$) cuyo eje focal está alineado con el *eje x*, con foco en $F(\sqrt{2}, 0)$ y vértice en $V(1,0)$.

Al proceso de marcar las unidades a lo largo de los ejes (cT, X) se le llama calibrar el diagrama de Minkowski.

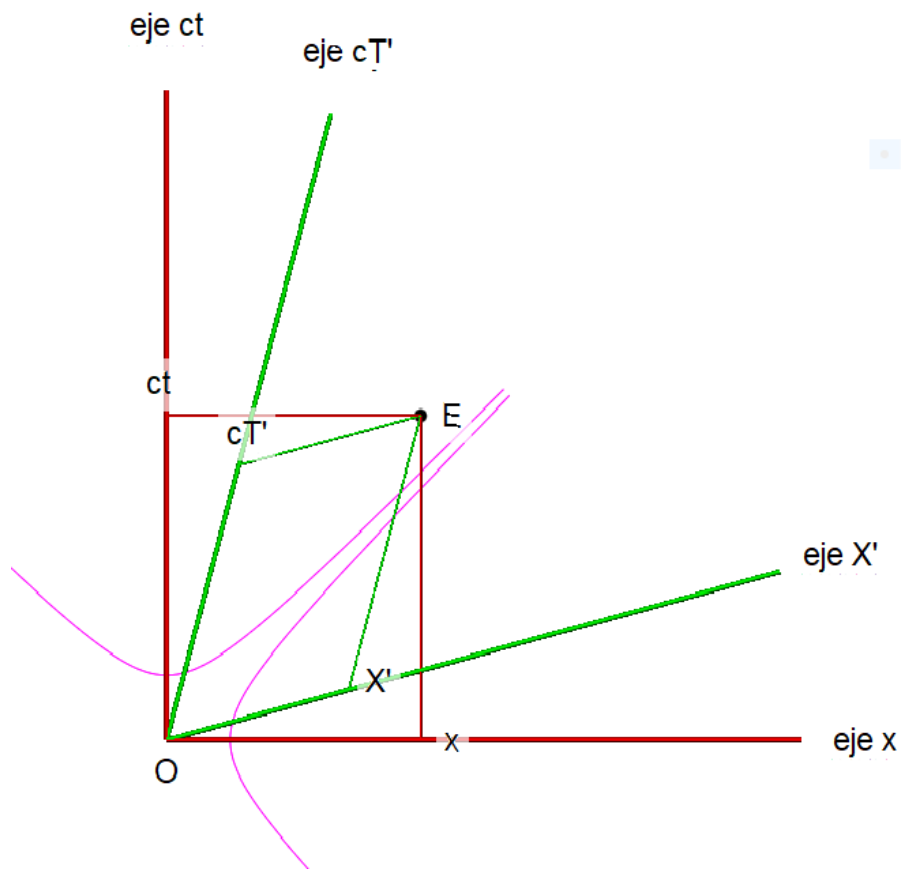


Fig. A3.2: Hipérbolas para graduar las unidades de tiempo y espacio del sistema B .

En esta deducción de las transformadas de Lorentz a partir de la métrica hemos partido, además de la métrica, de unos vectores que definen los ejes. El vector \vec{u}_{cT} es claro que visto desde el sistema cartesiano es $\vec{u}_{cT} \propto (\cos \alpha, \sin \alpha)$, con $\tan \alpha = v/c$. Y una vez que tenemos el vector \vec{u}_{cT} se puede obtener \vec{u}_X haciendo que sea ortogonal a \vec{u}_{cT} en la métrica de Minkowski. Y con todo ello, se deduce las transformadas de Lorentz, de las que se deduce, entre otras, la constancia de la velocidad de la luz.

ANEXO 4: INTERVALO ESPACIOTEMPORAL

El producto escalar en el espacio de Minkowski define el intervalo espaciotemporal s :

$$s^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = c^2 t^2 - x^2 \quad (A4.1)$$

donde \vec{r} es un vector que parte del origen. Para un vector cualquiera, con origen en $E_1(ct_1, x_1)$ y extremo en $E_2(ct_2, x_2)$, se definiría como:

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \quad (A4.2)$$

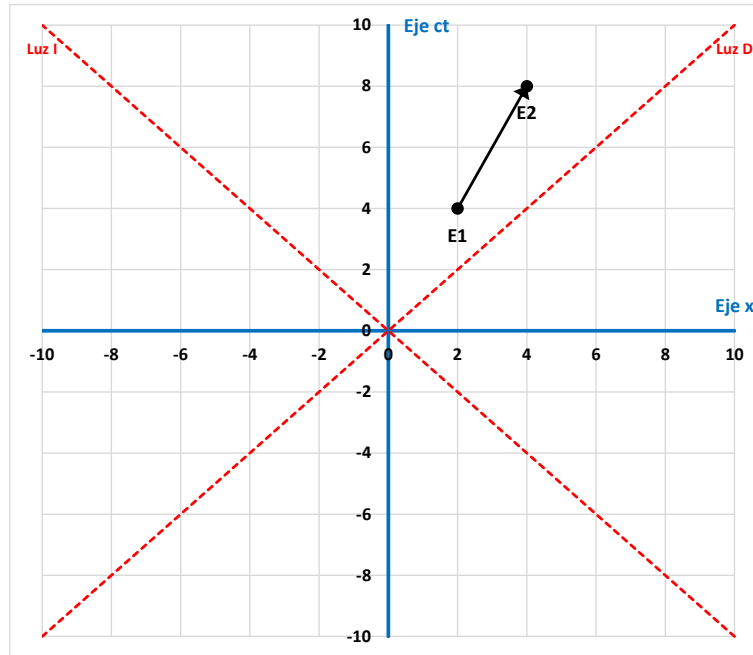


Fig. A4.1: Intervalo espaciotemporal para un vector $\overrightarrow{E_1 E_2}$

En la figura A4.1 se muestra dos sucesos de coordenadas (4,2) y (8,4), el intervalo es

$$\Delta s^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = (8 - 4)^2 - (4 - 2)^2 = 12 > 0$$

Pero para la explicación que sigue, vamos a volver a llevarnos el origen del vector al origen del sistema de referencia y, por ejemplo, para el vector $\vec{r} = (8,4)$ tenemos la figura A4.2 donde el producto escalar $s^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = 8^2 - 4^2 = 48 > 0$:

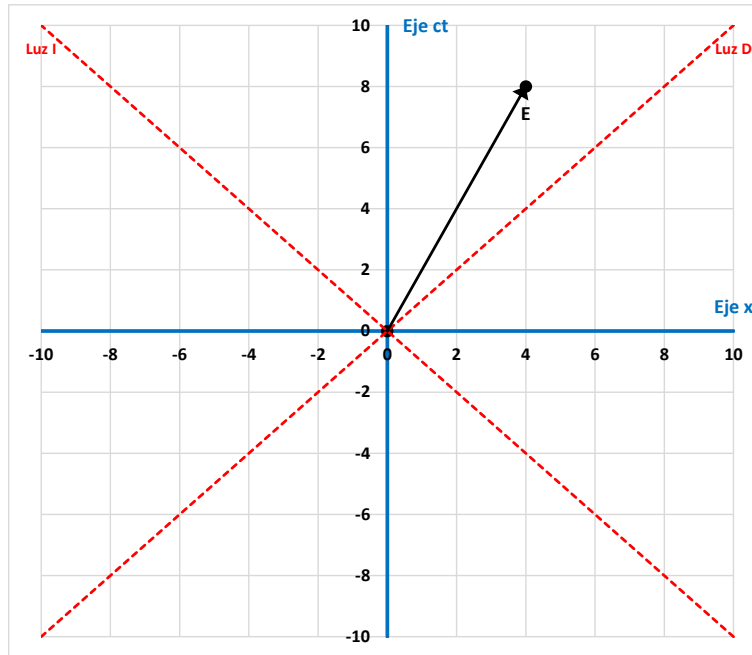


Fig. A4.2: Vector tipo tiempo, su $s^2 > 0$

Cuando $s^2 > 0$ el intervalo tiene naturaleza temporal, con $s = c\tau$. En este caso existe un sistema de referencia (llamémosle B), que se mueve con velocidad $v = \frac{x_E}{t_E} = \tan \alpha$, en el que el suceso origen y el suceso extremo del vector \vec{r} sucede en el mismo lugar del sistema B (tienen la misma coordenada espacial $X = 0$), entonces $\tau = s/c$ es el intervalo de tiempo que marcaría un reloj fijo en B (que se mueve con velocidad v respecto al sistema A) entre el suceso origen y el extremo de \vec{r} (véase figura A4.3).

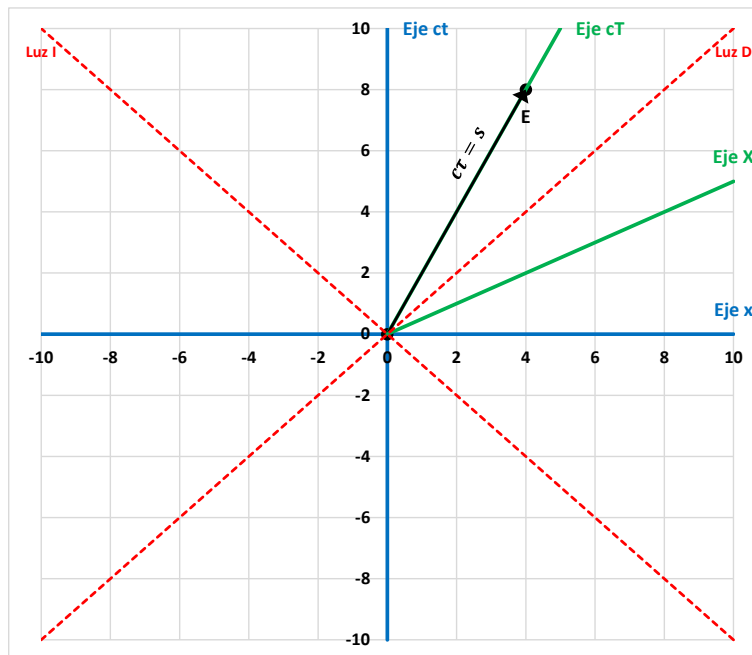


Fig. A4.3: $\tau = s/c$ es lo que marca un reloj que se mueve con velocidad $v = x_E/t_E$

En la siguiente figura se muestra un vector con $s^2 < 0$.

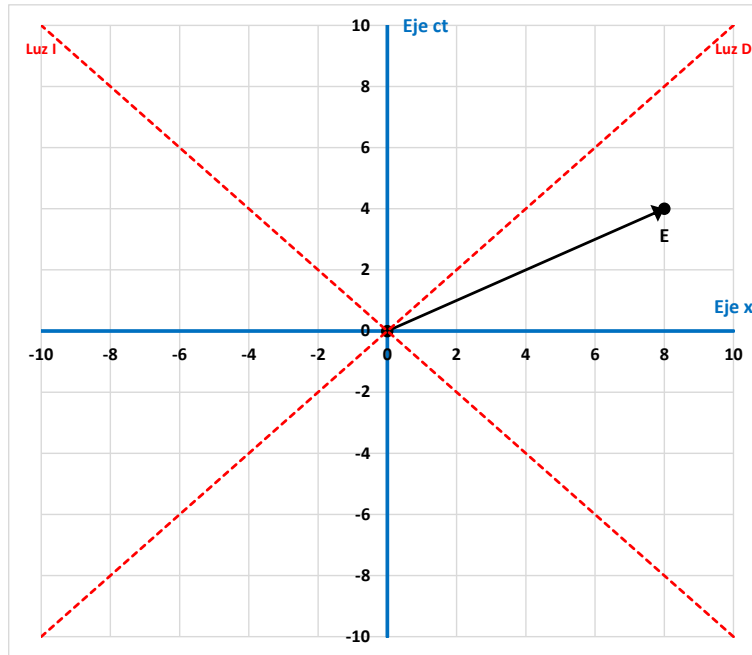


Fig. A4.4: Vector tipo espacio, su $s^2 < 0$, mide una longitud $l = \sqrt{-s^2}$

Cuando $s^2 < 0$ el intervalo tiene naturaleza espacial y mide una longitud l , tal que $l^2 = -s^2 = x^2 - c^2t^2$. En este caso existe un sistema de referencia (el que se mueve con velocidad $v = t_E/x_E$) en el que el suceso origen y el suceso extremo del vector \vec{r} sucede simultáneamente (tienen la misma coordenada temporal $T = 0$), entonces $l = \sqrt{-\Delta s^2}$ es la longitud que mide una regla en reposo en el sistema B cuando se coloca un extremo en el origen y el otro en E (véase figura A4.5).

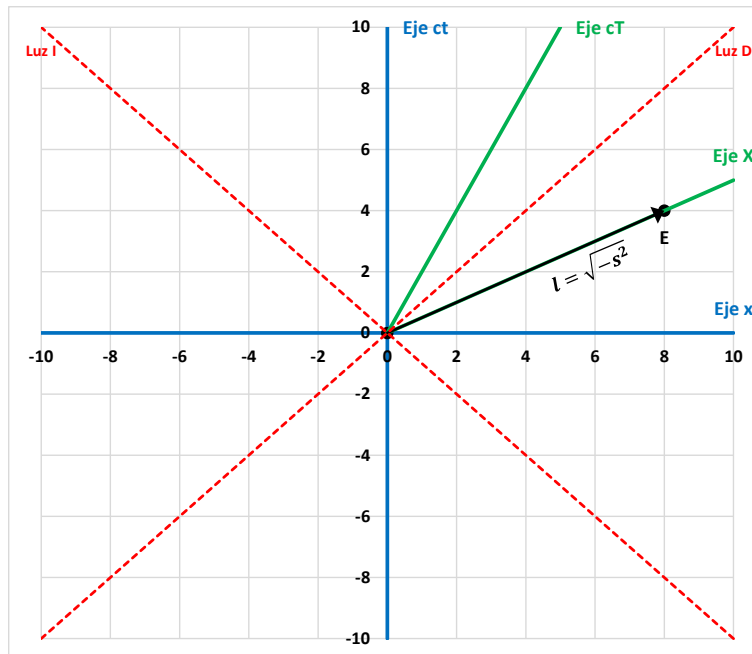


Fig. A4.5: Para $s^2 < 0$, $\sqrt{-s^2}$ es la longitud que mide una regla.

Por tanto, la interpretación de un producto escalar negativo tiene un sentido físico perfectamente válido.

Cuando el evento E cae sobre la bisectriz, el intervalo es tipo luz y su $s^2 = 0$ porque en estos casos $x_E = ct_E$. Para alcanzar estos sucesos desde el origen hay que moverse a la velocidad de la luz tal y como sucede con los fotones.

Se dice que el valor del intervalo espaciotemporal es invariante pues toma el mismo valor en los sistemas de referencia relacionados por las transformadas de Lorentz, cumpliéndose:

$$(cT)^2 - X^2 = (ct)^2 - x^2 \quad (A4.3)$$

Utilizando las transformadas:

$$\begin{aligned} X &= \gamma \left(x - \left(\frac{v}{c}\right) ct \right) \\ cT &= \gamma \left(ct - \left(\frac{v}{c}\right) x \right) \end{aligned} \quad (A4.4)$$

$$\begin{aligned} (cT)^2 - X^2 &= \gamma^2 \left[\left(ct - \left(\frac{v}{c}\right) x \right)^2 - \left(x - \left(\frac{v}{c}\right) ct \right)^2 \right] = \\ &= \gamma^2 \left[(ct)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 x^2 - 2ct \left(\frac{v}{c}\right) x - x^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 (ct)^2 + 2ct \left(\frac{v}{c}\right) x \right] = \\ &= \gamma^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right) [(ct)^2 - x^2] = (ct)^2 - x^2 \end{aligned}$$

ANEXO 5: CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD

En la figura 11, se muestran las trayectorias en el espaciotiempo de los extremos de una barra fija en el sistema B (líneas verdes paralelas al *eje CT*). La longitud de la barra es igual a la longitud del segmento \overline{PQ} , que según se muestra es igual al valor de la coordenada $X(Q)$ que es constante. Así,

$$L_0 = X(Q)$$

[El subíndice 0 es para indicar que es una longitud propia, es decir la correspondiente a una longitud en reposo en el sistema.]

Y se ha dibujado una barra en color rojo entre P y Q que es paralela al eje espacial del sistema A .

Tomamos la ecuación (2.5), calculamos las coordenadas de los extremos P y Q de la barra en el sistema A :

$$\begin{pmatrix} x_P \\ ct_P \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ cT_P \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_P = \gamma \frac{v}{c} cT_P \\ ct_P = \gamma cT_P \end{cases} \quad (\text{A5.1})$$

$$\begin{pmatrix} x_Q \\ ct_Q \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0 \\ cT_P \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_Q = \gamma (L_0 + \frac{v}{c} cT_P) \\ ct_Q = \gamma (\frac{v}{c} L_0 + cT_P) \end{cases} \quad (\text{A5.2})$$

Pero la longitud de la barra para el sistema A no puede ser la diferencia de

$$x_Q - x_P = \gamma L_0 > L_0$$

porque son las coordenadas de los extremos de la barra en dos instantes de tiempo distintos para el sistema A . Hay que buscar el evento R sobre la trayectoria del extremo de la barra que tenga un $t_R = t_P$. Entonces se tendría:

$$ct_P = \gamma cT_P$$

$$ct_R = \gamma \left(\frac{v}{c} L_0 + cT_R \right)$$

Para que correspondan al mismo instante de tiempo para el sistema A se debe verificar:

$$\gamma cT_P = \gamma \left(\frac{v}{c} L_0 + cT_R \right)$$

$$cT_R = cT_P - \frac{v}{c} L_0 \quad (\text{A5.3})$$

Usando T_R en lugar de T_P en la ecuación (A5.2) se obtiene:

$$x_R = \gamma \left(L_0 + \frac{v}{c} cT_R \right) = \gamma \left(L_0 + \frac{v}{c} (cT_P - \frac{v}{c} L_0) \right) = \gamma \left(\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) L_0 + \frac{v}{c} cT_P \right)$$

Y ahora si se resta x_R y x_P sí se tiene una distancia:

$$x_R - x_P = \gamma \left(\left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) L_0 + \frac{v}{c} cT_P \right) - \gamma \frac{v}{c} cT_P$$

$$x_R - x_P = \gamma \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) L_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} L_0 \quad (c. q. v)$$

Una demostración breve en dos pasos se puede encontrar en página 62 de "Introduction to Special Relativity", de Robert Resnick, 1968.