DILATACION DEL TIEMPO DE RELOJES EN MOVIMIENTO

Guillermo Navas

guillermophysics@gmail.com

EL TIEMPO DE RELOJES EN MOVIMIENTO

La divulgación científica suele explicar el efecto relativista de la "dilatación del tiempo" afirmando que para un reloj en movimiento el tiempo transcurre más lentamente. Esto supone una simplificación que da lugar a equívocos.

Partimos de dos relojes iguales que marcan un tiempo cero inicialmente. En el siguiente dibujo animado mostramos una representación de lo que se puede imaginar sobre la marcha de los relojes cuando se mueve uno respecto al otro: Reloj B (en rojo) considerado móvil respecto a reloj A (verde) fijo.

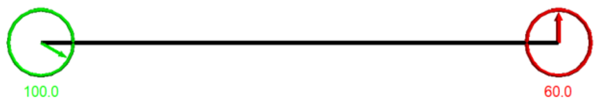

Fig. 1: Reloj A (verde) fijo, reloj B (rojo) móvil

El reloj B (en rojo) se mueve al 80% de la velocidad de la luz $(V/c = 0{,}8)$ con respecto al reloj A (en verde). Así, cuando el reloj B recorre una distancia de 80 año-luz, el reloj A marca 100 años:

$$t_{reloj\ A} = d/V = \frac{80c}{0{,}8c} = 100\ años$$

Mientras, el reloj B (en rojo) marca 60 años:

$$t_{reloj\ B} = \sqrt{1 - 0{,}8^2}\, t_{reloj\ A} = 0{,}6\ t_{reloj\ A} = 60\ años$$

Y lo que tenemos es la relación:

$$t_{reloj\ B} < t_{reloj\ A} \qquad (*\ 1)$$

Quizá, la primera imprecisión sea afirmar que es uno de los relojes el que se mueve, y el otro es el que está en reposo, pues B puede afirmar, en pie de igualdad con A, que es A el que se mueve hacia la izquierda. Y, en este caso, tendríamos el siguiente comportamiento de los relojes: El reloj A (verde) es el que se considera que se mueve respecto a B (rojo) fijo y su tiempo transcurre más lentamente.

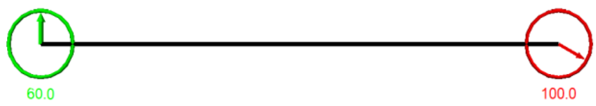

Fig. 2: Reloj A (verde) móvil, reloj B (rojo) fijo

Lo que se muestra ahora es que el reloj A es el que marca el tiempo más lentamente que el reloj B:

$$t_{reloj\,B} = 100\ años$$

$$t_{reloj\,A} = \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}\, t_{reloj\,B} = 60\ años$$

Y ahora tenemos la relación contraria

$$t_{reloj\,A} < t_{reloj\,B} \qquad (*\,2)$$

Pregunta, ¿Hay contradicción en estos dos resultados? Veremos que, dando los detalles que se suelen obviar, no existe ninguna contradicción. En realidad, corresponden a dos tipos de observaciones o experimentos distintos. Volvamos al primer ejemplo, cuando decimos que el tiempo del reloj B es menor que el del reloj A estamos comparando el tiempo de un reloj con el de dos relojes separados que están sincronizados y en reposo relativo, según se muestra en el dibujo animado: Reloj B móvil comparado con dos relojes A sincronizados fijos.

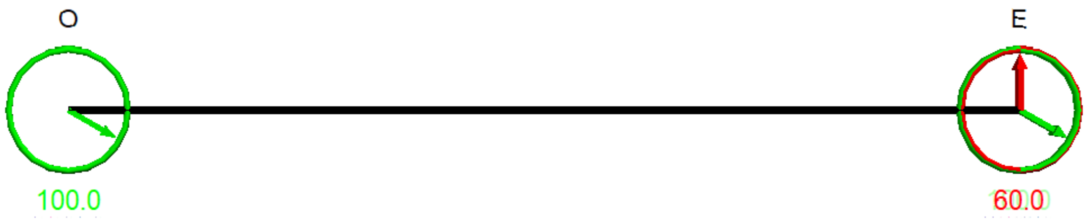

Fig. 3: Comparación de la lectura de un reloj con dos relojes distantes sincronizados

Nota: para comparar los tiempos finales bastan dos relojes fijos situados en los extremos, pero para visualizar que el tiempo del reloj en movimiento marcha más lentamente a lo largo del recorrido, tal como se ve en la animación, se necesita una red de observadores con relojes sincronizados situados a lo largo del recorrido que permita hacer la comparación de forma continua.

En realidad, esta representación es una proyección sobre el eje espacial de lo que sucede en el espaciotiempo. Desplegando el tiempo, las trayectorias que sigue cada reloj en el espaciotiempo se muestra en el siguiente dibujo animado: Relojes en el espaciotiempo: reloj B comparado con dos A.

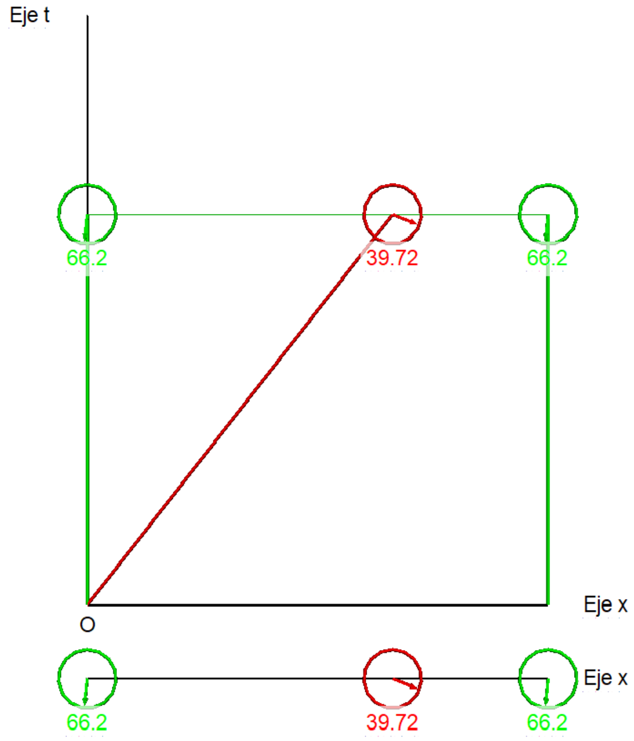

Fig. 4: El reloj B comparado con los relojes sincronizados con A

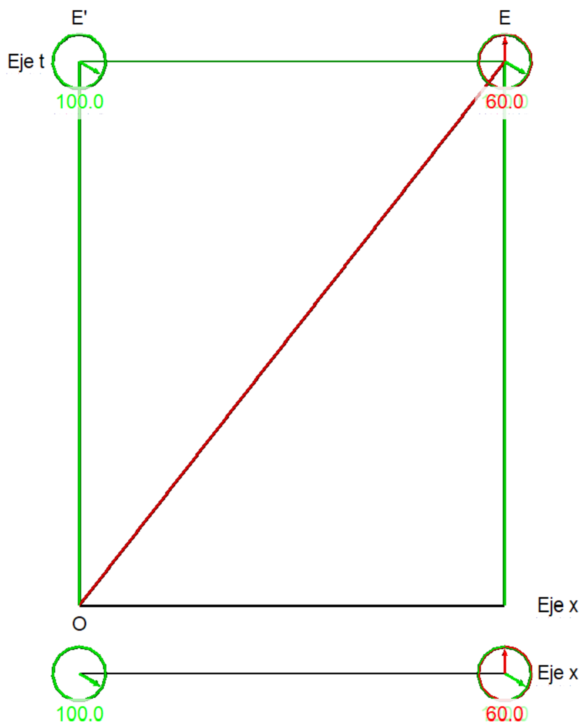

Fig. 5: Cuando B alcanza al reloj A_d (sincronizado con A) marca 60 frente a 100 de A_d

Para referirnos a los relojes A del dibujo utilizaremos un subíndice para indicar la posición que ocupan, así el reloj que se encuentra en $x = d$ lo designaremos por A_d, aunque para el que se encuentra en el origen $x = 0$, que es el propio reloj A (reloj primario o guía de la sincronización), lo vamos a seguir designando sin subíndice. Y los tiempos que marcan los relojes se designan, por ejemplo, por $t_{A_d}(E)$, indicando entre paréntesis el evento[1] cuyo tiempo mide. Con estas designaciones lo que se está comparando es:

$$t_B(E) - t_B(O) < t_{A_d}(E) - t_A(O) \qquad (*\,3)$$

Donde: 1) $t_B(O)$ es el tiempo del reloj B en el evento O (cuando el reloj A y B coinciden); 2) $t_B(E)$ es el tiempo del reloj B en el evento E (cuando A_d y B coinciden). Para que $(*\,1)$ tenga sentido, A y A_d tienen que estar sincronizados, y en concreto $t_A(O)$=$t_{A_d}(O')$, siendo O' el suceso simultáneo a O para el sistema de referencia de los relojes A[2].

Si hacemos $t_B(O) = 0$ y $t_A(O) = 0$ (cuando los relojes A y B coinciden se ponen a cero), la ecuación $(*\,3)$ queda reducida a:

$$t_B(E) < t_{A_d}(E) \qquad (*\,3')$$

En el dibujo hemos marcado, sobre la línea de universo del reloj A, el suceso E' que es simultáneo al suceso E sobre la línea de universo del reloj A_d para el sistema de referencia A (en él los relojes A_x se encuentran en reposo relativo). El hecho de que sean simultáneos significa que $t_A(E') = t_{A_d}(E)$. Por tanto, la ecuación $(*\,3')$ se puede reducir a una ecuación donde sólo intervienen los tiempos de los relojes iniciales (el A y B):

$$t_B(E) < t_A(E') \qquad (*\,4)$$

Sin embargo, si consideramos la simultaneidad en el sistema de referencia de B, y comparamos el tiempo del reloj de A contra dos relojes de B, entonces el reloj que marcha más lento es A. Se muestra marcha del reloj A comparado con dos B. Las líneas de simultaneidad para el sistema de referencia del reloj B son paralelas al eje espacial X[3].

---

[1] Para los más legos, en el espaciotiempo (la unión del espacio y del tiempo) un "evento" es el análogo de lo que es un punto en el espacio. El evento queda identificado por su localización en el tiempo y su posición espacial.

[2] Al ser la relación de simultaneidad relativa a un marco de referencia hay que indicar el sistema en que se es simultáneo.

[3] El eje de tiempo para el sistema de referencia de B describe una línea inclinada que hace un ángulo α con la vertical, de tal forma que $\tan\alpha = v/c$ y el eje espacial X describe una línea recta que hace un ángulo α con la horizontal.

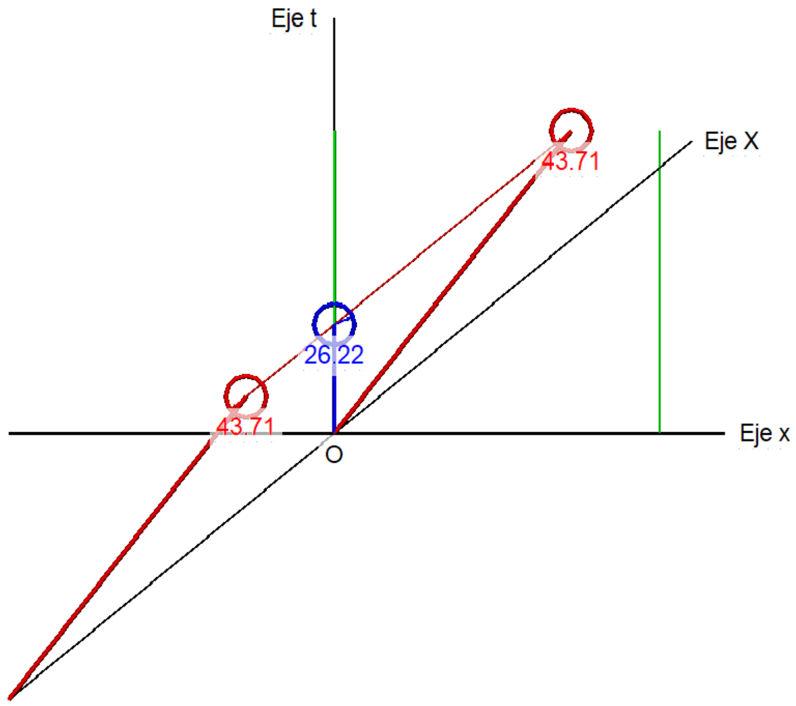

Fig. 6: El reloj A comparado con los relojes sincronizados con B, el reloj A marcha más lentamente

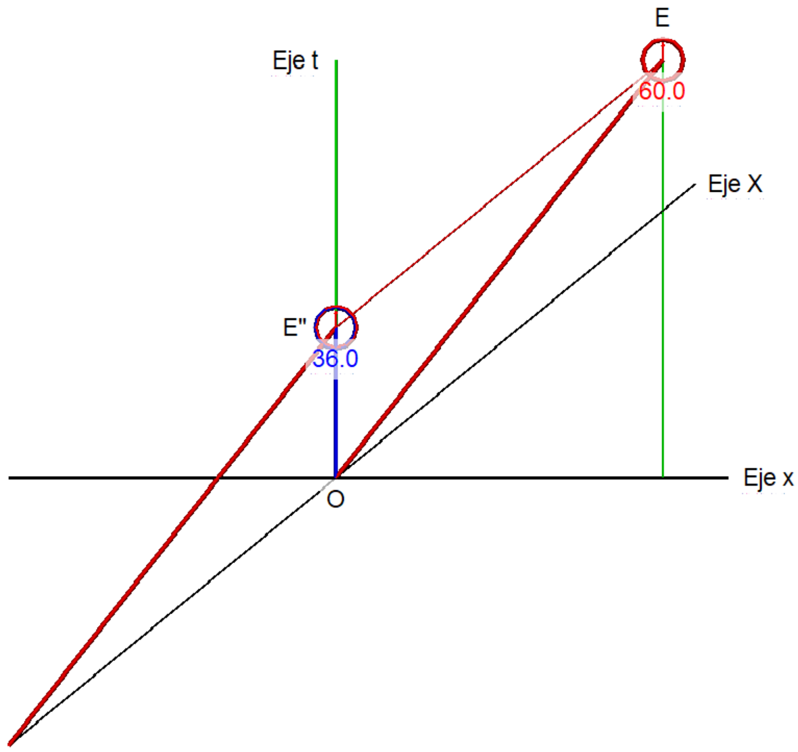

Fig. 7: Para B el suceso simultáneo a E es E'' y, en este evento, A marca menos tiempo que B

En este caso la relación que se tiene es:

$$t_A(E'') - t_A(O) < t_{B_{d'}}(E'') - t_B(O) \qquad (*5)$$

donde $t_{B_{d'}}$ es el reloj sincronizado con B situado en d'(d' es -60 años-luz[4]) y E'' es el suceso situado sobre la línea de mundo del reloj A que es simultáneo a E para el reloj B.

Y si, como antes, utilizamos que $t_B(O) = t_A(O) = 0$,

$$t_A(E'') < t_{B_{d'}}(E'') \qquad (*\,5')$$

Al ser E'' simultáneo a E para los relojes B, se tiene $t_{B_{d'}}(E'') = t_B(E)$ y $(*\,5')$ queda:

$$t_A(E'') < t_B(E) \qquad (*\,6)$$

Si ahora comparamos la expresión $(*\,6)$ con la $(*\,4)$, tenemos las dos relaciones, que si nos atenemos a los detalles de cómo se ha obtenido y de que los tiempos están referidos a los de sucesos concretos, no resultan contradictorios:

$$t_B(E) < t_A(E')$$

$$t_A(E'') < t_B(E)$$

Pero si, simplificando más todavía, no se indican los sucesos, utilizamos la receta de que $t_B < t_A$ porque es el reloj B el que se mueve respecto a A, y que $t_A < t_B$ porque es el reloj A el que se mueve respecto a B, resultan relaciones confusas y paradójicas (en el sentido fuerte de contradictoria). Es decir, que la confusión es resultado de la simplificación.

Vemos en este dibujo animado la representación conjunta de la dilatación según la simultaneidad.

---

[4] d' es negativo por corresponder a una coordenada X a la izquierda del reloj B que tiene $X = 0$. Cuando el reloj B_d ha recorrido la distancia d' su reloj marca el tiempo $t_{B_{d'}}(E'')$. Como la velocidad de los relojes B relativa a A es 0,8c se tiene,

$$v = \frac{-d'}{t_{B_{d'}}(E'')} = 0{,}8\,c$$

Y como $t_{B_{d'}}(E'') = t_B(E) = 60\ años$,

$$|d'| = 0{,}8\,c * 60 = 48\ años - luz$$

Es decir, $|d'|$ es la longitud contraída de la longitud d en el sistema de referencia de A:

$$|d'| = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\,d = 0{,}6\,d = 48\ años - luz$$

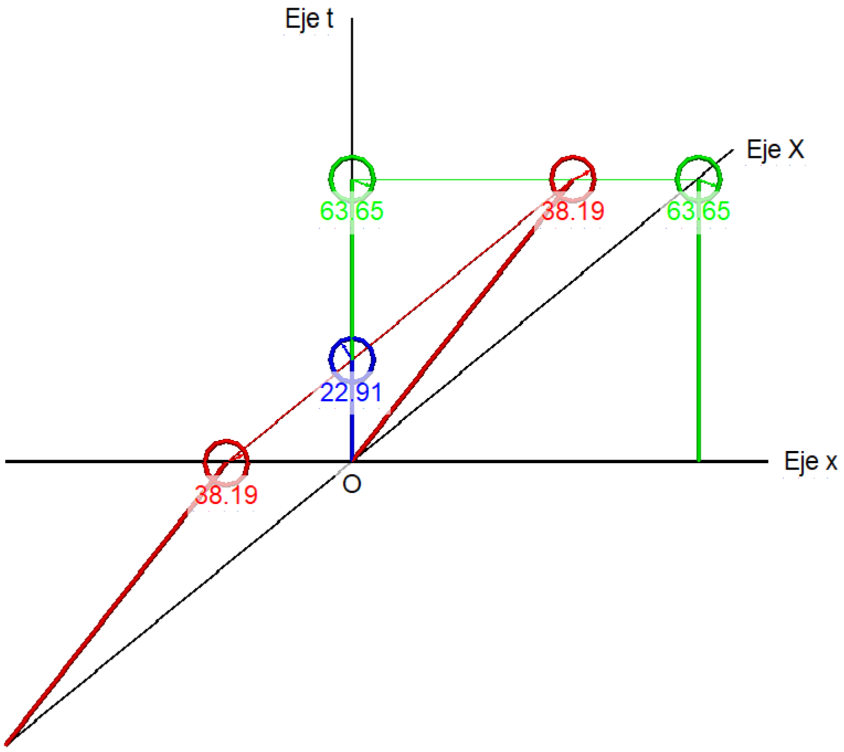

Fig. 8: Comparación conjunta de las dilataciones según la simultaneidad

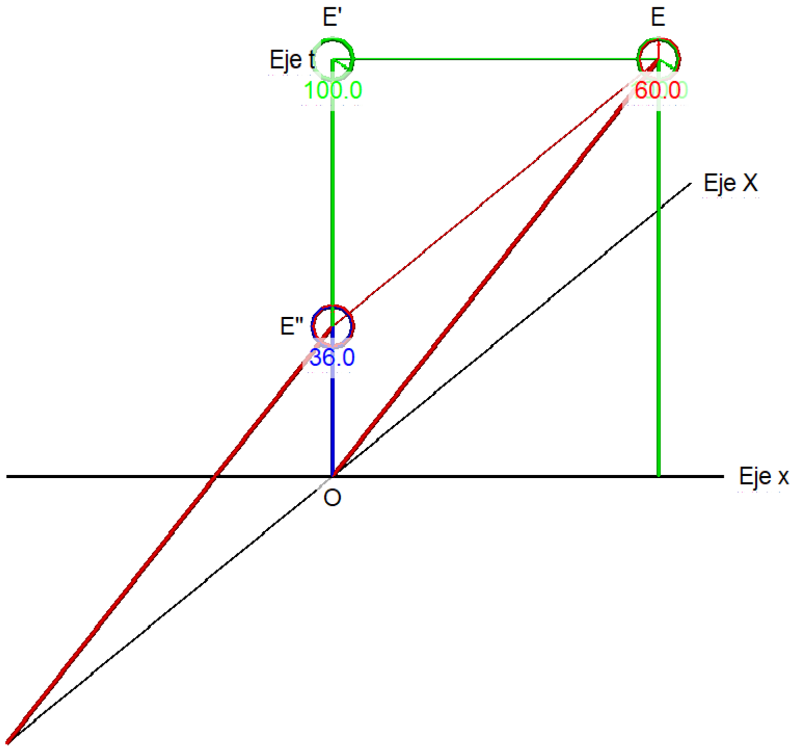

Fig. 9: Para los relojes de A es el reloj B el que dilata (100 años frente a 60) mientras que para los relojes de B es el reloj A el que dilata (36 años frente a 60).

Como resumen, en relatividad "qué se mide depende de cómo se mide". La lectura de un intervalo de tiempo medido en un reloj[5] es menor que la lectura de un intervalo medido como diferencia de los tiempos de dos relojes distantes que están sincronizados. Expresado mediante una fórmula:

$$\frac{\Delta\tau_B(OE)}{\Delta t_{coordenado\ A}(OE)} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad (*\,7)$$

donde τ es un tiempo propio y t el tiempo de la red de relojes del sistema de coordenadas. Por ejemplo, en la figura 9, vemos que $\Delta\tau_B(OE) = t_B(E) - t_B(O) = 60$ (obsérvese que es un tiempo propio porque está medido con el mismo reloj), mientras que $\Delta t_{coordenado\ A}(OE) = t_{A_d}(E) - t_A(O) = 100$. Así que:

$$\frac{\Delta\tau_B(OE)}{\Delta t_{coordenado\ A}(OE)} = \frac{t_B(E) - t_B(O)}{t_{A_d}(E) - t_A(O)} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 0{,}6$$

Y, simétricamente, de la misma forma, se halla:

$$\frac{\Delta\tau_A(OE'')}{\Delta t_{coordenado\ B}(OE'')} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad (*\,8)$$

En la figura 9, se tiene $\Delta\tau_A(OE'') = t_A(E'') - t_A(O) = 36$ (tiempo propio porque está medido con el mismo reloj), y $\Delta t_{coordenado\ B}(OE'') = t_{B_{d'}}(E'') - t_B(O) = 60$.

$$\frac{\Delta\tau_A(OE'')}{\Delta t_{coordenado\ B}(OE'')} = \frac{t_A(E'') - t_A(O)}{t_{B_{d'}}(E'') - t_B(O)} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 0{,}6$$

Hay otra forma en la que se puede expresar la relación de dilatación. Volvamos a la ecuación $(*\,7)$ y a la figura 9. Si vemos la figura,

$$t_{A_d}(E) - t_A(O) = t_A(E') - t_A(O)$$

Pero $t_A(E') - t_A(O)$ es la diferencia de tiempo del mismo reloj, es decir, es un intervalo de tiempo propio donde el extremo es el suceso E' que es el simultáneo de E para el reloj A, esto es, $\Delta\tau_A(OE)$. Según esto la ecuación $(*\,7)$ se puede interpretar como la comparación entre la marcha de los relojes A y B, esto es:

$$\left(\frac{\Delta\tau_B(OE)}{\Delta\tau_A(OE')}\right)_{simultaneidad\ según\ A} = \frac{\Delta\tau_B(OE)}{\Delta t_{coordenado\ A}(OE)} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad (*\,7')$$

[5] Lo que técnicamente se llama "tiempo propio" o Wheeler y Taylor llama "tiempo de reloj de pulsera" (wristwatch time). El tiempo propio se diferencia del "tiempo coordenado" que se mide mediante una red de relojes sincronizados.

En la ecuación anterior añadimos el indicativo de "simultaneidad según A", para recordar que E' es simultáneo a E.

Esta fórmula se puede interpretar como: "al comparar dos intervalos de tiempo propio de relojes en movimiento es mayor el del reloj utilizado para fijar la simultaneidad". Por ejemplo, $t_{B_{d'}}(E'') - t_B(O) = t_B(E) - t_B(O)$= $\Delta\tau_B(OE)$, así que la ecuación $(*\,8)$ se puede expresar como:

$$\left(\frac{\Delta\tau_A(OE'')}{\Delta\tau_B(OE)}\right)_{simultaneidad\ según\ B} = \frac{\Delta\tau_A(OE'')}{\Delta t_{coordenado\ B}(OE'')} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \qquad (*\,8')$$

Y si se invierte $(*\,8')$ para comparar con $(*\,7')$, se tiene:

$$\left(\frac{\Delta\tau_B(OE)}{\Delta\tau_A(OE'')}\right)_{simultaneidad\ según\ B} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (*\,8'')$$

Entre $(*\,7')$ y $(*\,8'')$ no existe ninguna contradicción porque, aunque el numerador sea el mismo, el denominador corresponde a un intervalo entre sucesos distintos. La relación entre los tres intervalos que intervienen en $(*\,7')$ y $(*\,8')$, es:

$$\frac{\Delta\tau_B(OE)}{\Delta\tau_A(OE')} = \frac{\Delta\tau_A(OE'')}{\Delta\tau_B(OE)} \Rightarrow \Delta\tau_B(OE) = \sqrt{\Delta\tau_A(OE')\Delta\tau_A(OE'')} \qquad (*\,9)$$

Si en aras de simplificar la expresión se obvia los detalles de los sucesos o de la diferencia entre medir un tiempo propio y un tiempo coordenado, de $(*\,9)$ obtendríamos la conclusión incorrecta de que los dos relojes marcan la misma hora: $\Delta\tau_B = \Delta\tau_A$.

La receta completa y detallada para comparar el tiempo de relojes en movimiento sería: "Dado dos relojes, A y B, en movimiento relativo uniforme $V_{AB} = V$, los intervalos de tiempo (propio) que registran A y B son tales que:

$$\Delta\tau_A(OE'') < \Delta\tau_B(OE) < \Delta\tau_A(OE') \qquad (*\,10)$$

donde E es un suceso genérico de la línea de mundo del reloj B, E' y E'' son sucesos sobre la línea de mundo del reloj A que son simultáneos a E para el reloj A y para el reloj B, respectivamente, siendo O el suceso donde coinciden ambos relojes". Además, se cumple:

$$\Delta\tau_B(OE) = \sqrt{\Delta\tau_A(OE')\Delta\tau_A(OE'')} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\ \Delta\tau_A(OE') \qquad (*\,11)$$

Si en la ecuación $(*\,10)$ nos fijamos en la primera desigualdad, se obtiene que el reloj A marcha más lentamente, y si nos fijamos en la segunda desigualdad, se obtiene que es el reloj B el que marcha más lento. Ambos efectos son reales y observarlo es factible experimentalmente.

Naturalmente, los relojes A y B están en pie de igualdad (principio de relatividad) y por lo mismo, para un suceso genérico F sobre la línea de mundo del reloj A tendríamos la ecuación, análoga a $(*\,10)$:

$$\Delta\tau_B(OF'') < \Delta\tau_A(OF) < \Delta\tau_B(OF') \qquad (*\,12)$$

donde F' y F'' son los sucesos situados sobre la línea de mundo del reloj B tal que F' es simultáneo a F para el reloj B y F'' es simultáneo para el reloj A.